Université Claude-Bernard Lyon 1

L1 MASS - UE Math Algèbre 2

Contrôle continu d'Algèbre

Vendredi 11 avril 2008 - Durée : 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits.

Exercice 1 *Quelles sont les racines du polynôme* $1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7$ *dans le corps des complexes ? Étendre ce résultat.*

Exercice 2 *Décomposer en éléments simples de* $\mathbb{R}[X]$ *la fraction rationnelle*

$$\frac{1}{X^2(X-1)^2}.$$

Exercice 3 *Pour* $a \in \mathbb{R}$, *on pose* $P_a := 2X^3 - 9X^2 + 12X + a$.

1. *Trouver le PGCD de* P_a *et de son polynôme dérivé* P_a' *en discutant suivant la valeur de* a.
2. *Pour quelles valeurs de* a *le polynôme* P_a *admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer* P_a *en produit de polynômes irréductibles.*

Exercice 4

1. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur un corps* $\mathbb{K}$ *et soit* f *une application de* E *dans* F.
   (a) *Énoncer à quelle condition* f *est linéaire. En supposant* f *linéaire, énoncer le théorème du rang.*
   (b) *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$ *et* f *définie par* $f(x, y, z) := 3x - y + 2z$. *Dire pourquoi* f *est linéaire. Quelle est la dimension de son noyau ?*
   (c) *Plus généralement, si on suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ *et* $F = \mathbb{R}$, *comment s'écrit* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *?*
2. *Soit* E *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$.
   (a) *Donner un critère pour qu'une partie de* E *soit un sous-espace vectoriel de* E.
   (b) *Le sous-ensemble* F *de* $\mathbb{R}^3$ *constitué des triplets* (x, y, z) *tels que* $3x - y + 2z = 0$ *et* $x - 2y + 5z = 0$ *est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *? Que représente géométriquement* F *? Donner un base.*

Exercice 5 *Soient* E *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$ *et soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Donner la formule reliant les dimensions de* F, G, $F + G$ *et de* $F \cap G$. *En déduire les dimensions de* $F + G$ *et de* $F \cap G$ *lorsque* E, F *et* G *sont de dimensions respectives* 4, 2 *et* 3 *et* F *n'est pas un sous espace vectoriel de* G.

Exercice 6 *Soit* E *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$.

1. *Soient* $x_1, \ldots, x_n$, n *éléments de* E. *A quelle condition ces* n *éléments forment-ils une famille liée ?*

2. *On suppose* $E = \mathbb{R}^4$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *On considère les vecteurs* $v_1 = (1, -1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (2, -1, 3, 2)$, $v_5 = (6, 2, 8, 2)$.
   (a) *Montrer que la famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est libre.*
   (b) *Soit* $F \subseteq \mathbb{R}^4$ *le sous-espace vectoriel engendré par* v_1, v_2, v_4 *et* $G \subseteq \mathbb{R}^4$ *le sous-espace vectoriel engendré par* v_1, v_3, v_5. *Déterminer* $F + G$ *et* $F \cap G$.
   (c) *Déterminer un supplémentaire de* F.