Université Claude-Bernard Lyon 1

L1 MASS - UE Math Algèbre 2

Corrigé du contrôle continu d'Algèbre

du Vendredi 11 avril 2008 - Durée : 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits.

Exercice 1 *Quelles sont les racines du polynôme $1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7$ dans le corps des complexes ? Étendre ce résultat.* Soit $P := 1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7$ et $Q := (1-X)P$. Comme $\mathbb{C}$ est un corps, un nombre complexe est racine de Q si et seulement si il est racine de $1-X$ ou racine de P. Le polynôme $1-X$ a pour racine 1 et 1 n'est pas racine de P, donc les racines de P sont les racines de Q distinctes de 1. On a $Q = 1 - X^8$. Donc les racines de Q sont les racines huitièmes de l'unité, c'est à dire les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{k\pi}{4}}$ pour $k = 0, \dots, 7$. Ainsi les racines de P sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{k\pi}{4}}$ pour $k = 1, \dots, 7$. Remplaçons P par $P_n := 1 + X + \cdots + X^n$. Le polynôme Q devient $1 - X^{n+1}$. Les racines de P_n sont les racines $n+1$-ièmes de l'unité distinctes de 1, c'est à dire les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$ pour $k = 1, \dots, n$.

Exercice 2 *Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle*

$$\frac{1}{X^2(X-1)^2}.$$

Soit F la fraction ci-dessus. La partie entière est nulle. Les polynômes X^2 et $(X-1)^2$ sont étrangers. La fraction F peut donc s'écrire :

$$F = \frac{a_0 + a_1 X}{X^2} + \frac{b_0 + b_1 X}{(X-1)^2}, \tag{1}$$

Pour trouver a_0 et a_1 posons $A := 1$, $B := (X-1)^2$, ainsi $F = \frac{A}{X^2 B}$, et effectuons la division suivant les puissances croissantes de 1 par $(X-1)^2 = 1 - 2X + X^2$ à l'ordre 1. C'est à dire écrivons $A = B(a_0 + a_1 X) + X^2 R$. En divisant par $X^2 B$, nous obtenons $F = \frac{A}{X^2 B} = \frac{a_0 + a_1 X}{X^2} + \frac{R}{B}$. Calculons :

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & & & & 1 \; -2X \; +X^2 \\ \cline{5-5}
-1 & +2X & -X^2 & & 1 \; +2X \\ \cline{1-4}
& 2X & -X^2 & & \\
& -2X & +4X^2 & -2X^3 & \\ \cline{2-4}
& & 3X^2 & -2X^3 &
\end{array}$$

Ainsi $a_0 = 1, a_1 = 2$ et $R = 3 - 2X$. Soit $F = \frac{1+2X}{X^2} + \frac{3-2X}{(X-1)^2}$. On a $\frac{3-2X}{(X-1)^2} = \frac{1-2(X-1)}{(X-1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-1}$. Ainsi,

$$F = \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-1}.$$

Exercice 3 *Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $P_a := 2X^3 - 9X^2 + 12X + a$.*

1. *Trouver le PGCD de P_a et de son polynôme dérivé P'_a en discutant suivant la valeur de a.*
   Nous avons $P'_a = 6X^2 - 18X + 12$. Divisons P_a par P'_a :

$$\begin{array}{rrrr|lll}
2X^3 & -9X^2 & +12X & +a & 6X^2 & -18X & +12 \\ \cline{5-7}
-2X^3 & +6X^2 & -4X & & \frac{1}{3}X & -\frac{1}{2} & \\ \cline{1-4}
 & -3X^2 & +8X & +a & & & \\
 & 3X^2 & -9X & +6 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -X & +a+6 & & &
\end{array}$$

   Nous avons $P_a = P'_a Q + R_1$ avec $Q = \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}$ et $R_1 = -X + a + 6$. Les polynômes P_a et P'_a d'une part, et P'_a et R_1 d'autre part, ayant mêmes diviseurs, nous divisons P'_a par R_1 :

$$\begin{array}{rrr|ll}
6X^2 & -18X & +12 & -X & +a+6 \\ \cline{4-5}
-6X^2 & +6(a+6)X & & -6X & -6(a+3) \\ \cline{1-3}
 & 6(a+3)X & +12 & & \\
 & -6(a+3)X & +6(a+3)(a+6)+12 & & \\ \cline{2-3}
 & & 6(a+3)(a+6)+12 & &
\end{array}$$

   Si $a + 3 = 0$, c'est à dire $a = -3$, la division s'arrête à la première étape. On a $P'_a = R_1 Q_1 + R_2$ avec $Q_1 = -6X$ et $R_2 = 12$. Comme R_2 est une constante non nulle, les polynômes P_a et P'_a sont premiers entre eux. Si $a+3 \neq 0$, alors $Q = -6X - 6(a+3)$ et $R_2 = 6(a+3)(a+6) + 12 = 6(a^2 + 9a + 20)$. Si $R_2 \neq 0$, les polynômes P_a et P'_a sont premiers entre eux. Si $R_2 = 0$, un PGCD est le dernier reste non nul. L'équation du second degré $a^2 + 9a + 20 = 0$ a pour discriminant 1 et donc pour racines -4 et -5. Donc, on a $R_2 = 0$ pour $a = -4$ et $a = -5$. Ce qui donne respectivement $R_1 = 2 - X$ et $R_1 = 1 - X$. Donc ces restes sont les PGCD.

2. *Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ?*
   Le polynôme P_a a une racine double si et seulement si les polynômes P_a et P'_a ont une racine commune, c'est à dire si un polynôme du premier degré les divise. L'analyse faite ci-dessus montre que c'est le cas pour $a = -4$ et pour $a = -5$. Autre preuve : Un réel est racine double d'un polynôme s'il est à la fois racine de ce polynôme et de son polynôme dérivé. Nous avons $P'_a = 6X^2 - 18X + 12 = 6(X^2 - 3X + 2)$. Les racines sont 1 et 2. Nous avons $P_a(1) = 5 + a$ et $P_a(2) = 4 + a$. Donc 1 est racine double si et seulement si $a = -5$. De même 2 est racine double si et seulement si $a = -4$.

   Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de polynômes irréductibles. Si r est racine double de P_a nous avons $P_a = \lambda(X - r)^2(X - \alpha)$. En identifiant avec les termes extrêmes du développement de P_a il vient immédiatement $\lambda = 2$ et $\alpha = -a$. Ainsi $P_{-5} = 2(X - 1)^2(X - 5)$ et $P_{-4} = 2(X - 1)^2(X - 4)$.

Exercice 4 1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et soit f une application de E dans F.*

   (a) *Énoncer à quelle condition f est linéaire. En supposant f linéaire, énoncer le théorème du rang.* L'application f est linéaire si :

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b) \tag{2}$$

   pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $a, b \in E$. Le théorème du rang peut s'énoncer :

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \tag{3}$$

Formule dans laquelle $Im(f)$ désigne l'image de E par l'application f. Le *rang* de f, noté $rang(f)$, est la dimension de $Im(f)$, d'où le nom du théorème.

(b) *On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$ et f définie par $f(x, y, z) := 3x - y + 2z$. Dire pourquoi f est linéaire. Quelle est la dimension de son noyau ?* Pour la linéarité de f on peut faire référence au cours (ou à la question b) ci-après), ou la montrer directement comme suit : soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $a := (x, y, z), b := (x', y', z') \in E$. On a $\lambda a + \mu b = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (\mu x', \mu y', \mu z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ donc $f(\lambda a + \mu b) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = 3(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') = \lambda(3x - y + 2z) + \mu(3x' - y' + 2z') = \lambda f(a) + \mu f(b)$. D'après la formule du rang, $dim(Ker(f)) = dim(E) - dim(Im(f))$. On a $dim(E) = 3$. Puisque $dim(F) = 1$ et f n'est pas identiquement nulle, on a $dim(Im(f)) = 1$. Ainsi, $dim(Kerf(f)) = 2$.

(c) *Plus généralement, si on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, comment s'écrit $f(x_1, \ldots, x_n)$?*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \tag{4}$$

où $a_1 = f(e_1), \ldots, a_n = f(e_n)$ et $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique de R^n ($e_1 := (1, 0, \ldots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n := (0, \ldots, 1)$).

2. *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.*

(a) *Donner un critère pour qu'une partie de E soit un sous-espace vectoriel de E.* Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si elle n'est pas vide et si :

$$\lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ et } a, b \in F \text{ impliquent } \lambda a + \mu b \in F. \tag{5}$$

(b) *Le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ constitué des triplets (x, y, z) tels que $3x - y + 2z = 0$ et $x - 2y + 5z = 0$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?* Oui : c'est l'intersection de deux sous espaces vectoriels. On a en effet $F = Ker(f) \cap Ker(g)$ où f et g sont les applications linéaires de R^3 dans R définies par $f(x, y, z) := 3x - y + 2z$ et $g(x, y, z) := x - 2y + 5z$. *Que représente géométriquement F ?* Une droite passant par l'origine du repère. C'est en effet l'intersection de deux plans passant par l'origine. *Donner un base.* On résoud le système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 5z & = & 0. \end{array}\right.$

On peut le réécrire en : $\left\{\begin{array}{rcrl} 3x & - & y & = -2z \\ x & - & 2y & = -5z. \end{array}\right.$ En éliminant successivement x et y on trouve $5y = 13z$ et $5x = z$. En prenant $z = 5$, on obtient $x = 1$ et $y = 13$. Ainsi $b := (1, 13, 5)$ est solution et toutes les solutions sont des multiples de b. Autrement dit, b engendre F, qui donc est de dimension un. Ainsi $\{b\}$ est une base de F.

Exercice 5 *Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner la formule reliant les dimensions de F, G, $F + G$ et de $F \cap G$.* La voici :

$$dim(F) + dim(G) = dim(F + G) + dim(F \cap G). \tag{6}$$

En déduire les dimensions de $F + G$ et de $F \cap G$ lorsque E, F et G sont de dimensions respectives 4, 2 et 3 et F n'est pas un sous espace vectoriel de G. On a $dim(F + G) = 4$. En effet, comme $F \not\subseteq G$, on a $3 = dim(G) < dim(F + G) \leq dim(E) = 4$. Avec la formule ci-dessus on en déduit $dim(F \cap G) = 1$.

Exercice 6 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.*

1. *Soient $x_1, \ldots, x_n$, n éléments de E. A quelle condition ces n éléments forment-ils une famille liée ?* Qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.
2. *On suppose $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On considère les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (2, -1, 3, 2)$, $v_5 = (6, 2, 8, 2)$.*
   (a) *Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.* Soient λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :
   $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0. \tag{7}$$
   Nous avons : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$
   En retranchant la quatrième équation à la première, nous obtenons $\lambda_3 = 0$. En reportant cette valeur dans la deuxième équation, nous obtenons $\lambda_1 = 0$; en reportant ces valeurs dans la quatrième équation, nous tirons $\lambda_2 = 0$. Puisque ce système n'a pour solution que la solution nulle, les trois vecteurs forment une famille libre.
   (b) *Soit $F \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_4 et $G \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_3, v_5. Déterminer $F + G$ et $F \cap G$.* Nous avons $v_4 = v_1 + v_2$. Donc $v_4 \in F$. Comme les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, il forment une base de F. En particulier, $dim(F) = 2$. Le vecteur v_5 n'est pas dans l'espace engendré par v_1 et v_3. Sinon existeraient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $v_5 = \lambda v_1 + \mu v_3$. Ils devraient alors vérifier $\lambda + \mu = 6$ et $\lambda + \mu = 8$, ce qui est impossible. Comme v_1 et v_3 ne sont pas proportionnels, il s'ensuit que les vecteurs v_1, v_3, v_5 forment une base de G. Voyons si les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_5 forment une famille libre. Résolvons :
   $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_5 v_5 = 0. \tag{8}$$
   Nous avons :
   $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 6\lambda_5 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 + 2\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 8\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_5 = 0. \end{cases}$
   En éliminant λ_1 des trois dernières équations, nous obtenons :
   $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 6\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 + 8\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + \quad + 2\lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 + 4\lambda_5 = 0. \end{cases}$
   De même, en éliminant λ_2 de la troisième équation, puis λ_3, obtenons :
   $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 6\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 + 8\lambda_5 = 0 \\ 3\lambda_3 + 6\lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 + 4\lambda_5 = 0. \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 6\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 + 8\lambda_5 = 0 \\ 3\lambda_3 + 6\lambda_5 = 0 \\ 6\lambda_5 = 0. \end{cases}$
   Ce système n'a donc comme solution que la solution nulle. Donc les quatre vecteurs sont linéairement indépendants. Ainsi $F + G = \mathbb{R}^4$. Avec la formule de l'exercice précédent, nous obtenons que $dim(F \cap G) = 1$. Ainsi $\{v_1\}$ est une base de $F \cap G$.
   (c) *Déterminer un supplémentaire de F.* Puisque la dimension de F est 2 et celle de E est 4, la dimension d'un supplémentaire de F est 2. Puisque les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_5 forment une base de $\mathbb{R}^4$, l'espace engendré par v_3, v_5 est un supplémentaire de F.