Université Claude Bernard Lyon 1

**Math II - Algèbre**

# Examen 1ère session

04 juin 2008 – durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

**Question 1.** Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\underline{f} = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = mat_{\underline{e},\underline{f}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Calculer $g(v)$.

b) Est-ce que $g$ est injective ? Géometriquement $\mathrm{Ker}(g)$ représente un plan ou une droite ?

c) Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(g)$ ? Donner une base de $\mathrm{Im}(g)$. Est-ce que $g$ est surjective ?

d) Soit $\underline{f'} = (f'_1, f'_2) = ((1, -1), (2, 0))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer $Q := mat_{\underline{f'},\underline{f}}(id)$, la matrice de passage de la base $\underline{f}$ à la base $\underline{f'}$.

e) Pourquoi $Q$ est-elle inversible ? Justifier sans faire de calculs. Calculer $Q^{-1}$.

f) Donner une expression de $B = mat_{\underline{e},\underline{f'}}(g)$ (la matrice de $g$ dans les bases $\underline{e}$ et $\underline{f'}$) en fonction de $A$ et $Q$. Calculer la matrice $B$.

**Question 2.** Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices avec $m$ lignes et $n$ colonnes.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Donner une définition du rang de $A$.

b) Dire pour chacun des énoncés suivants s'il est vrai ou faux. On justifiera pourquoi.

b$_1$) Pour toute $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, le rang de ${}^tA$ est égal au rang de $A$.

b$_2$) Pour toute $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, si $A$ a plus de lignes que de colonnes, alors le rang de $A$ est égal à son nombre de colonnes.

b$_3$) Pour toute $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, si le rang de $A$ est égal à son nombre de colonnes, alors $A$ est inversible.

c) Calculer le rang de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Question 3.**

a) Que signifie : "les matrices $A$ et $B$ sont semblables" ?

b) On considère la matrice $A$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que $A$ et la matrice identité $I_3$ sont semblables ?

c) Donner toutes les matrices semblables à $I_3$.

**Question 4.** Soit $A$ une matrice symétrique et inversible. Montrer que son inverse est symétrique.

**Question 5.** On considère sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ la structure d'espace vectoriel donnée par les opérations

+) $(P_1, Q_1) + (P_2, Q_2) = (P_1 + P_2, Q_1 + Q_2)$

$\cdot$) $\lambda(P_1, Q_1) = (\lambda P_1, \lambda P_2)$.

Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ fixés. On définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par

$$\varphi(P, Q) = AP + BQ.$$

a) Montrer que $\varphi$ est linéaire.

b) Montrer que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$

$$R \in \mathrm{Im}(\varphi) \Longleftrightarrow \mathrm{PGCD}(A, B) \ \text{ divise } \ R.$$

c) Montrer que $\varphi$ n'est pas injective.