Université Claude Bernard Lyon-1
Licence Sciences et technologie
Unité d'enseignement Math II Algèbre
Examen 2ème session
20 juin 2008 — durée 1 h 30 mn

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Question 1. On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_5[X]$ des polynômes de degré au plus 5, et son sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2. Soit $\phi : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application

$$\phi : a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + fX^5 \mapsto a + bX + cX^2.$$

(1) Montrer que ϕ est linéaire et surjective.
(2) Quel est son noyau $\ker(\phi)$?
(3) Montrer que $\mathbb{R}_5[X] = \operatorname{im}(\phi) \oplus \ker(\phi)$.
(4) Donner un isomorphisme entre $\operatorname{im}(\phi)$ et $\ker(\phi)$.

Question 2. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Deux matrices $A, B \in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$ sur un corps $\mathbb{K}$ sont dites équivalentes lorsque il existe deux matrices inversibles $P \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et $Q \in M_{(m,m)}(\mathbb{K})$ telles que

$$B = Q^{-1}AP.$$

(1) Montrer que l'équivalence de matrices est une relation d'équivalence.
(2) On suppose $m \geq n$. Quel est le rang maximal pour une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$. Pour $m = 3$ et $n = 2$, donner un exemple de matrice où le rang maximal est atteint.

Dire alors pour chacun des énoncés suivants s'il est vrai ou faux. On donnera une justification.

(a) Si $m \geq n$ et A est équivalent à une matrice de rang maximale, alors A est la matrice d'une application injective.
(b) Si $m \geq n$ et A est équivalent à une matrice de rang maximale, alors A est la matrice d'une application surjective.
(c) Le rang de A est égal au rang de B si et seulement si A et B sont équivalentes.

Question 3.

(1) Calculer le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & -22 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 4. On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure naturelle de plan vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application suivante :

$$\phi(z) = iz - \mathrm{Re}(z).$$

(1) Montrer que ϕ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
(2) Donner la matrice A de ϕ dans la base $\bar{e} = (1, i)$.
(3) Quelle est la matrice Q de passage de la base $\bar{e}$ à la base $\bar{f} = (1 + i, 1 - i)$?
(4) Donner une expression de la matrice B de ϕ dans la base $\bar{f}$ en fonction de A et de Q. Calculer B.