Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Math II Algèbre - Contrôle Continu 1

(Corrigé)

Exercice 1 (5 points)

Résoudre suivant les valeurs du réel a le système suivant :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+4y+z+2t &=& 3 \\ 6x+8y+2z+5t &=& 7 \\ 9x+12y+3z+10t &=& 13+a \end{array} \right.$$

Appliquons la méthode du pivot.

$$(S_1) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+4y+z+2t &=& 3 \\ t &=& 1 \\ t &=& 1+a \end{array} \right.$$

Les deux dernières lignes de ce système sont cohérentes si et seulement si $a=0$.
1er cas : $a \neq 0$. Alors (S_1) n'admet $\underline{\text{pas de solution dans } \mathbb{R}^4}$.
2ème cas : $a=0$. Alors (S_1) est équivalent au système suivant :

$$(S_1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+4y+z &=& 1 \\ t &=& 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& 1-3x-4y \\ t &=& 1 \end{array} \right.$$

Ainsi il y a une infinité de solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \{(x, y, 1-3x-4y, 1),\ /\ x, y \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 2 (6 points)

Résoudre suivant les valeurs du réel m le système suivant :

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z &=& m \\ mx+y-z &=& 1 \\ x-y+mz &=& 1 \end{array} \right.$$

Appliquons la méthode du pivot.

$$(S_2) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z &=& m \\ (1+m)y+(-1-m)z &=& 1-m^2 \\ (m-1)z &=& 1-m \end{array} \right.$$

On voit d'après la dernière ligne qu'il va falloir traiter à part le cas où $m=1$.
1er cas : $m=1$. La dernière ligne devient $0=0$. On a alors :

$$(S_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1 \\ 2y-2z &=& 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& z \\ z &=& z \end{array} \right.$$

Il y a une infinité de solutions qui sont les suivantes : $\boxed{\mathcal{S} = \{(1, z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}}$.
2ème cas : $m \neq 1$. La dernière ligne devient $z = -1$. On a alors :

$$(S_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & m + 1 \\ (1+m)y & = & -m^2 - m \\ z & = & -1 \end{array} \right.$$

Selon la deuxième ligne, il y a un cas douteux lorsque $m = -1$.
Cas 2.A : $m = -1$. La deuxième ligne devient $0 = 0$. On a alors :

$$(S_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ z & = & -1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & = & y \\ z & = & -1 \end{array} \right.$$

Il y a une infinité de solutions qui sont les suivantes : $\boxed{\mathcal{S} = \{(y, y, -1) \ / \ y \in \mathbb{R}\}}$.
Cas 2.B : $m \neq \{-1, 1\}$. Alors le système devient :

$$(S_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -m \\ z & = & -1 \end{array} \right.$$

Il y a alors une unique solution qui est $\mathcal{S} = \boxed{\{(1, -m, -1)\}}$.

Exercice 3 (5 points)

Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, -x+2y, 5y-x) \end{array}$. f est-elle surjective ?

Il s'agit de trouver les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le système (S) : $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ -x + 2y & = & b \\ -x + 5y & = & c \end{array} \right.$ admette au moins une solution.

On réalise un pivot : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. Le système devient : $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ 3y & = & a + b \\ 6y & = & a + c \end{array} \right.$. Ce système est cohérent si et seulement $a + c = 2(a + b)$, c'est-à-dire si et seulement si $a + 2b - c = 0$.
1er cas : $a + 2b - c \neq 0$. Alors le système (S) n'admet pas de solution. $\underline{f \text{ ne sera donc pas surjective}}$.
2ème cas : $a + 2b - c = 0$. Alors le système (S) admet une unique (donc au moins une) solution qui est $\left(\frac{2a - b}{3}, \frac{a + b}{3} \right)$.
Conclusion :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^2) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a + 2b - c = 0\}}$$

Exercice 4 (4 points)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.
Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. $F = \{(a + b, -a, 2b) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   - F est clairement inclus dans $\mathbb{R}^3$.
   - $(0, 0, 0) \in F$: il suffit de prendre $a = b = 0$.
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{R}$,

   $$\lambda(a + b, -a, 2b) + (a' + b', -a', 2b') = \big((\lambda a + a') + (\lambda b + b'), -(\lambda a + a'), 2(\lambda b + b')\big) \in F$$

   Ainsi, F est bien un sous-espace vectoriel de E.
2. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 3\}$.
   - G est clairement inclus dans $\mathbb{R}^3$.
   - $(0, 0, 0) \notin F$ car $2 \times 0 + 0 - 0 \neq 3$.

   Ainsi F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.