Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Math II Algèbre - Contrôle Continu 2

Vendredi 06 Novembre 2009 - 13h45
Durée 1h00

L'usage de toute calculatrice est interdit. Aucun document personnel n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)

On pose les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(2x-y, x+y, -y) \quad / \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y-z=0\}$$

1. Montrer, de deux manières différentes, que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F et une base de G.
3. Déterminer les dimensions de F et G.

Exercice 2 (3 points)

On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille (u, v, w) est-elle libre ?

Exercice 3 (5 points)

Montrer que $(1, X-1, X^2+X)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2.

Exercice 4 (5 points)

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de R^3 suivants :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z=0\}$$

$$G = \{(2a+b, a-b, 2b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Déterminer $F \cap G$.
2. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?