Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Math II Algèbre - Contrôle Continu 2

(Corrigé)

Exercice 1 (7 points)

On pose les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(2x - y, x + y, -y) \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$$

1. **Montrer, de deux manières différentes, que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.**

   1ère méthode : image et noyau d'une application linéaire.
   On a $F = \mathrm{Im}(f)$ où $f : (x, y) \mapsto (2x - y, x + y, -y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
   On a $G = \mathrm{Ker}(g)$ où $g : (x, y, z) \mapsto 2x + y - z$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
   Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

   2ème méthode : mise sous la forme de Vect.
   On a $F = \{x(2, 1, 0) + y(-1, 1, -1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = Vect\,((2, 1, 0), (-1, 1, -1))$.
   On a $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 2x+y\} = \left\{(x, y, 2x + y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect\,((1, 0, 2), (0, 1, 1))$.
   Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. **Déterminer une base de F et une base de G.**
   On a déjà mis F et G sous la forme de Vect :

   $$F = Vect\,((2, 1, 0), (-1, 1, -1)) \quad \text{ et } \quad G = Vect\,((1, 0, 2), (0, 1, 1))\,.$$

   Les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(-1, 1 - 1)$ sont libres car non colinéaires, ils forment une base de F.
   Les vecteurs $(1, 0, 2)$ et $(0, 1, 1)$ sont libres car non colinéaires, ils forment une base de G.

3. **Déterminer les dimensions de F et G.**
   Comme les bases de F et G contiennent deux éléments chacune, on en déduit que

   $$\dim(F) = \dim(G) = 2.$$

Exercice 2 (3 points)

On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille (u, v, w) est-elle libre ?
On a $w = -v + 2u$. La famille est donc liée et non libre.
Si on ne voit pas immédiatement la relation, on peut faire la méthode générale :
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$.
Alors, on a le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} -2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$. qui admet des solutions différentes du triplet $(0, 0, 0)$ (à vérifier...) et donc la famille n'est pas libre.

Exercice 3 (5 points)

Montrer que $(1, X-1, X^2+X)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2.

Montrons que tout polynôme $P(X) = a+bX+cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$) peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$P = a + bX + cX^2 = \alpha.1 + \beta(X-1) + \gamma(X^2+X)$$

où α, β, γ sont des réels à déterminer.

Par identification (unicité d'un polynôme), cela revient à dire que le système $\left\{\begin{array}{rcl} \gamma & = & c \\ \beta+\gamma & = & b \\ \alpha-\beta & = & a \end{array}\right.$ admet une unique solution (α, β, γ) pour tout triplet (a, b, c) de réels donnés.

En effet, si (a, b, c) est donné, le système se résout et donne $\gamma = c$, $\beta = b - c$, $\alpha = a + b - c$.

On a ainsi exprimé tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de manière unique dans la famille $(1, X-1, X^2+X)$, qui est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4 (5 points)

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de R^3 suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$$

$$G = \{(2a+b, a-b, 2b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. **Déterminer $F \cap G$.**
   Soit u un vecteur de $F \cap G$. En particulier $u \in G$, donc il existe $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (2a_0 + b_0, a_0 - b_0, 2b_0)$.
   Alors, dire que $u \in F$ revient à dire que $(2a_0 + b_0) + (a_0 - b_0) - (2b_0) = 0 \Leftrightarrow 3a_0 - 2b_0 = 0$.
   On a donc $b_0 = \dfrac{3}{2}a_0$. Ainsi $u = \left(2a_0 + \frac{3}{2}a_0, a_0 - \frac{3}{2}a_0, 3a_0\right) \in Vect\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$.
   Ainsi, on a montré que $F \cap G = Vect\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$.
2. **A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?**
   F et G ne peuvent pas être supplémentaires puisqu'on a pas $F \cap G = \{0\}$.