Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

# Math II Algèbre - Contrôle Continu 3

Vendredi 20 Novembre 2009 - 13h45
Durée 1h00

*L'usage de toute calculatrice est interdit. Aucun document personnel n'est autorisé.*

---

### Exercice 1 (4 points)

Soit $E$ un espace vectoriel et $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $E$.
On définit les vecteurs suivants de $E$ :

$$a = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad b = e_1 - 2e_2 + 3e_3, \quad c = e_1 + 3e_3, \quad d = e_1 + e_4$$

La famille $(a, b, c, d)$ est-elle une base de $E$ ?

### Exercice 2 (12 points)

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que :
$$f(1,2) = (0,2,3), \quad f(1,1) = (1,0,1)$$
2. Déterminer $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Ecrire la matrice de $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer (dans l'ordre de votre choix, mais celui-ci est conseillé) :
   – l'image de $f$
   – le rang de $f$
   – le noyau de $f$
5. $f$ est-elle injective ? surjective ?

### Exercice 3 (4 points)

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ tels que $f \circ g = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.