Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Math II Algèbre - Contrôle Continu 3

(Corrigé)

Exercice 1 (4 points)

Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E.
On définit les vecteurs suivants de E :

$$a = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad b = e_1 - 2e_2 + 3e_3, \quad c = e_1 + 3e_3, \quad d = e_1 + e_4$$

La famille (a, b, c, d) est-elle une base de E ?

On a quatre éléments dans un espace vectoriel de dimension 4. Pour vérifier que c'est une base, il suffit de regarder si c'est une famille libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0\\
\Longrightarrow &\lambda_1(e_1 + 4e_2 + e_3 + e_4) + \lambda_2(e_1 - 2e_2 + 3e_3) + \lambda_3(e_1 + 3e_3) + \lambda_4(e_1 + e_4) = 0\\
\Longrightarrow &(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)e_1 + (4\lambda_1 - 2\lambda_2)e_2 + (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3)e_3 + (\lambda_1 + \lambda_4)e_4 = 0\\
\underset{\text{famille libre}}{\Longrightarrow} &\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0\\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 & = & 0\\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 + \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.\\
\Longrightarrow &\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 2\lambda_1\\ 7\lambda_1 + 3\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_4 & = & -\lambda_1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Avec les premières et troisièmes lignes, on voit que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ et on en déduit que $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Ainsi, la famille est bien libre, c'est une base de E.

Exercice 2 (12 points)

1. **Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que :**

$$f(1,2) = (0,2,3), \quad f(1,1) = (1,0,1)$$

   Il suffit de vérifier que la famille $((1,2),(1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Puisqu'on a deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, il suffit de vérifier que la famille est libre. Or les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre, et c'est ainsi une base de $\mathbb{R}^2$. On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. L'application f ci-dessus est donc unique.

2. **Déterminer $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.**
   On cherche à écrire $(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(1,1)$. Autrement dit, $(x,y) = (\alpha + \beta, 2\alpha + \beta)$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & x\\ 2\alpha + \beta & = & y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & y - x\\ \beta & = & 2x - y \end{array}\right.$$

Donc
$$(x,y) = (y-x)(1,2) + (2x-y)(1,1)$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y-x)f(1,2) + (2x-y)f(1,1) \\ &= (y-x)(0,2,3) + (2x-y)(1,0,1) \\ &= (2x-y, 2y-2x, -x+2y) \end{aligned}$$

3. **On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.**
   Ecrire la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
   On calcule les images de la base : $f(e_1) = f(1,0) = (2,-2,-1) = 2u_1 - 2e_2 - u_3$ et $f(e_2) = f(0,1) = (-1,2,2) = -u_1 + 2u_2 + 2u_3$.
   La matrice est donc la suivante :
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
4. **Déterminer (dans l'ordre de votre choix, mais celui-ci est conseillé) :**
   – **l'image de f**
   – **le rang de f**
   – **le noyau de f**
   L'image de f est $Vect(f(1,2), f(1,1))$ puisque $((1,2),(1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Ainsi, on a
$$\mathrm{Im}(f) = Vect\left((0,2,3),(1,0,1)\right)$$
   Comme les deux vecteurs sont non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Im}(f)$, qui est ainsi de dimension 2 :
$$\mathrm{rg}(f) = 2$$
   Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$. On en déduit ainsi, que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, autrement-dit :
$$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$
5. **f est-elle injective ? surjective ?**
   f est bien injective puisque $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
   f n'est cependant pas surjective puisque $2 = \mathrm{rg}(f) < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Exercice 3 (4 points)

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n tels que $f \circ g = 0$.

1. **Montrer que $\mathbf{Im}(g) \subset \mathbf{Ker}(f)$.**
   Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$, c'est-à-dire, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$.
   Alors, $f(y) = f \circ g(x) = 0$ par hypothèse.
   Ainsi, $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. **En déduire que $\mathbf{rg}(f) + \mathbf{rg}(g) \leq n$.**
   De l'identité précédente, on a donc $\mathrm{rg}(g) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \mathrm{rg}(f)$.
   Autrement dit, $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.