Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 Maths II Algèbre

Contrôle Continu

Vendredi 4 décembre 2009
durée : 1h

L'usage de tout document et de toute calculatrice est interdit.

Exercice 1. (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB.
2. Calculer ${}^tA$.

Exercice 2. (4 points)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer analytiquement f.
2. Déterminer le noyau de f et l'image de f.

Exercice 3. (10 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 5e_1 - 3e_2 - e_3, \qquad f(e_2) = -e_2 - 2e_3, \qquad f(e_3) = -12e_2 + e_3$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $f(u)$ où $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$.
3. Démontrer que $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 5u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = -5u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
4. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. (4 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $u_0 \in E$ tel que $f^2(u_0) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $(u_0, f(u_0), f^2(u_0))$ est une base de E.
2. Montrer que le rang de f est égal à 2.