Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 Maths II Algèbre

Correction Contrôle Continu

Vendredi 4 décembre 2009

Exercice 1. 1. $AB = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -6 & -7 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. 1. A étant la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on en déduit les images par f des vecteurs de base ce qui donne

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_2, \qquad f(e_2) = -2e_2 + 3e_3, \qquad f(e_3) = e_1 - 2e_2 - 2e_3.$$

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(-2e_1 + 2e_2) + y(-2e_2 + 3e_3) + z(e_1 - 2e_2 - 2e_3) \\ &= (-2x + z)e_1 + (2x - 2y - 2z)e_2 + (3y - 2z)e_3 \end{aligned}$$

On en déduit alors l'expression analytique de f

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-2x + z, 2x - 2y - 2z, 3y - 2z). \end{array}$$

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \ker f \iff f(u) = 0 \iff \begin{cases} -2x + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x \\ 2x - 2y - 4x = 0 \\ 3y - 4x = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = 2x \\ y = -x \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\ker(f) = \{0\}$.

Par définition, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Par la formule du rang, on a $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ et par ce qui précède $\dim(\ker f) = \dim(\{0\}) = 0$.
On en déduit alors que $\dim(\mathrm{Im} f) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. 1. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -12 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(5e_1 - 3e_2 - e_3) + y(-e_2 - 2e_3) + z(-12e_2 + e_3) \\ &= 5xe_1 + (-3x - y - 12z)e_2 + (-x - 2y + z)e_3. \end{aligned}$$

3. $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 5u\} = \ker(f - 5\mathrm{Id})$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = -5u\} = \ker(f + 5\mathrm{Id})$. Ainsi, F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer leur dimension, cherchons une famille génératrice de F_1 et une famille génératrice de F_2.
Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} u \in F_1 &\iff f(u) = 5u \\ &\iff 5xe_1 + (-3x - y - 12z)e_2 + (-x - 2y + z)e_3 = 5xe_1 + 5ye_2 + 5ze_3 \\ &\iff \begin{cases} 5x = 5x \\ -3x - y - 12z = 5y \\ -x - 2y + z = 5z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3x - 6y - 12z = 0 \\ -x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2y - 4z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \\ &\iff u = (-2y - 4z)e_1 + ye_2 + ze_3. \end{aligned}$$

Ainsi, $F_1 = \mathrm{vect}((-2, 1, 0), (-4, 0, 1))$ et puisque $((-2, 1, 0), (-4, 0, 1))$ est une famille libre, $\dim(F_1) = 2$. De même pour F_2 :

$$\begin{aligned} u \in F_2 &\iff f(u) = -5u \\ &\iff 5xe_1 + (-3x - y - 12z)e_2 + (-x - 2y + z)e_3 = -5xe_1 - 5ye_2 - 5ze_3 \\ &\iff \begin{cases} 5x = -5x \\ -3x - y - 12z = -5y \\ -x - 2y + z = -5z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 10x = 0 \\ -3x + 4y - 12z = 0 \\ -x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 12z = 0 \\ -2y + 6z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases} \\ &\iff u = 3ze_2 + ze_3. \end{aligned}$$

Donc, $F_2 = \mathrm{vect}((0, 3, 1))$ et $\dim(F_2) = 1$.

4. Pour montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$, on commence par montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $u \in F_1 \cap F_2$. Alors, par définition de F_1 et F_2, $f(u) = 5u = -5u$, d'où, $u = 0$. Ainsi, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

   A présent, on sait que $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et par la formule de Grassman, on a $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$. D'où, par la question précédente, on en déduit que $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions, on obtient que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

   Par conséquent, $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4. 1. E est un espace vectoriel de dimension 3 et la famille $(u_0, f(u_0), f^2(u_0))$ est composée de 3 vecteurs ; pour montrer que cette famille est une base, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_0 + \lambda_2 f(u_0) + \lambda_3 f^2(u_0) = 0. \tag{1}$$

Comme pour tout $u \in E$, $f^3(u) = 0$, pour tout $n \geq 3$, on a $f^n(u) = 0$, $u \in E$. En appliquant f^2 à l'égalité (**??**), on obtient

$$f^2(\lambda_1 u_0 + \lambda_2 f(u_0) + \lambda_3 f^2(u_0)) = f^2(0) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 f^2(u_0) + \lambda_2 f^3(u_0) + \lambda_3 f^2(u_0) = 0.$$

Comme $f^3(u_0) = f^4(u_0) = 0$, on obtient $\lambda_1 f^2(u_0) = 0$ et puisque $f^2(u_0) \neq 0$ par hypothèse, alors, $\lambda_1 = 0$. L'égalité (**??**) devient donc

$$\lambda_2 f(u_0) + \lambda_3 f^2(u_0) = 0. \tag{2}$$

En appliquant f à l'égalité (**??**), on obtient

$$f(\lambda_2 f(u_0) + \lambda_3 f^2(u_0)) = f(0) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_2 f^2(u_0) + \lambda_3 f^3(u_0) = 0.$$

De même que précédemment, on en déduit que $\lambda_2 = 0$. L'égalité (**??**) devient alors $\lambda_3 f^2(u_0) = 0$ et comme $f^2(u_0) \neq 0$, on obtient donc $\lambda_3 = 0$. Ainsi,

$$\lambda_1 u_0 + \lambda_2 f(u_0) + \lambda_3 f^2(u_0) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0. \\ \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

La famille $(u_0, f(u_0), f^2(u_0))$ est donc libre. Ainsi, $(u_0, f(u_0), f^2(u_0))$ est une base de E.

2. Par la question précédente, $(u_0, f(u_0), f^2(u_0))$ est une base de E donc, une famille libre de E. De plus, $f(u_0)$ et $f^2(u_0) = f(f(u_0))$ sont des éléments de $\mathrm{Im}f$. Comme $\mathrm{Im}f$ est un sous-espace vectoriel de E, la famille $(f(u_0), f^2(u_0))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}f$; donc,

$$\mathrm{rg}f = \dim(\mathrm{Im}f) \geq 2. \tag{3}$$

Par hypothèse, $f^2(u_0) \neq 0$ et $f^3(u_0) = 0$ (car $f^3 = 0$). Ainsi, $f(f^2(u_0)) = f^3(u_0) = 0$, donc, $f^2(u_0) \in \ker f$. On en déduit donc par linéarité de f que $\mathrm{vect}(f^2(u_0)) \subset \ker f$. D'où, $\dim(\ker f) \geq 1$. Par la formule du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Im}f) = \dim(E) - \dim(\ker f) \leq 3 - 1 = 2. \tag{4}$$

Par (**??**) et (**??**), on en déduit que $\mathrm{rg}f = \dim(\mathrm{Im}f) = 2$.