Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Math II Algèbre - Contrôle Continu 3

(Corrigé)

Exercice 1 (4 points)

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A) = \dim Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme les deux vecteurs sont non colinéaires, la dimension est égale à 2. Le rang de A est donc 2.

$\text{rg}(B) = \dim Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Le rang de B est donc 1.

$\text{rg}(C) = \dim Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Le rang de C est donc 1.

Exercice 2 (4 points)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.**
   Commençons à calculer A^2 et A^3.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

   Donc

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = \begin{pmatrix} 4-6+3-1 & 3-6+3 & 3-3 \\ 3-6+3 & 1-3+3-1 & 3-6+3 \\ -3+3 & -3+6-3 & -2+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **En déduire que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.**
   D'après la question précédente, on a donc

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0 \Longleftrightarrow A(A^2 - 3A + 3I) = I$$

   Ainsi, A est bien inversible et son inverse n'est autre que $A^2 - 3A + 3I$.

Exercice 3 (6 points)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour montrer que A est inversible, et déterminer son inverse.

On va, par des transformations élémentaires, changer la matrice A en la matrice I. On fait les mêmes opérations en partant de la matrice I et on obtiendra la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow 6L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{-1}{2}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow 6L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{-1}{2}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Exercice 4 (6 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et les vecteurs suivants :

$$u_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \quad u_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3, \quad u_3 = 3e_1 + e_3$$

1. **Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.**
   Comme on a trois vecteurs en dimension 3, il suffit de vérifier que la famille est libre.
   Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$.
   On a alors $(2\alpha + 2\beta + 3\gamma)e_1 + (\alpha - \beta)e_2 + (-\alpha + 2\beta + \gamma)e_3 = 0$.
   On en déduit facilement que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.
2. **Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.**
   La matrice consiste à écrire les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:
   $$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
3. **Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.**
   On peut soit calculer l'inverse de la matrice précédente. On peut aussi résoudre le système et déterminer e_1, e_2, e_3 en fonction de u_1, u_2, u_3.
   Ici, on a :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 2e_1 + e_2 - e_3 & = & u_1 \\ 2e_1 - e_2 + 2e_3 & = & u_2 \\ 3e_1 + e_3 & = & u_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2e_1 + e_2 - e_3 & = & u_1 \\ 4e_1 + e_3 & = & u_1 + u_2 \\ 3e_1 + e_3 & = & u_3 \end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} e_2 & = & u_1 - 2e_1 + e_3 \\ e_3 & = & u_1 + u_2 - 4(u_1 + u_2 - u_3) \\ e_1 & = & u_1 + u_2 - u_3 \end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} e_1 & = & -4u_1 - 5u_2 + 6u_3 \\ e_3 & = & -3u_1 - 3u_2 + 4u_3 \\ e_1 & = & u_1 + u_2 - u_3 \end{array}\right.$$

   La matrice à obtenir est donc :
   $$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$