

Math II Algèbre
Epreuve finale de contrôle continu, 21 Janvier 2010
Durée 2heures

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.
Toute réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction dans la correction.*

Exercice 1 :

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers F .

Montrer que : u est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Correction

Si u est injective alors si $x \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E$ car u est injective, ce qui montre que $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ alors $u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x - y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E$ car $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, et donc $x = y$ ce qui montre que u est injective.

Exercice 2 :

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$$

$$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$$

$$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$$

1°) Déterminer la matrice de u dans la base canonique.

2°) Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E .

3°) Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Donner une base (b, c) de F .

4°) Montrer que $\beta' = (a, b, u(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

5°) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

6°) Déterminer la matrice R de u dans la base β' .

Correction

$$1°) A = \text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2°) u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } 0_{\mathbb{R}^3} \in E$$

Soient $x \in E$ et $y \in E$ et λ et μ deux réels, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda x + \mu y$, donc $\lambda x + \mu y \in E$, E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}
x = (x_1, x_2, x_3) \in E &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4L_2 + L_1 \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Une base de E est le vecteur $a = (1, 0, 1)$ et bien sur $\dim(E) = 1$.

3°) Il est clair que le vecteur nul est dans F .

Soient $x \in F$ et $y \in F$ et λ et μ deux réels

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3),$$

$$-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + 3(\lambda x_3 + \mu y_3) = \lambda(-2x_1 + 2x_2 + 3x_3) + \mu(-2y_1 + 2y_2 + 3y_3) = 0$$

Donc $\lambda x + \mu y \in F$. F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow x = \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3, x_2, x_3 \right) = x_2(1, 1, 0) + \frac{x_3}{2}(3, 0, 2)$$

On pose $b = (1, 1, 0)$ et $c = (3, 0, 2)$

(b, c) est une famille génératrice de F formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.

Une base de F est (b, c) .

4°) $u(b)$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&\det(a, b, u(b)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Donc $(a, b, u(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

5°) $\dim(E) + \dim(F) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

$(1, 0, 1) \notin F$ car $-2 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 1 \neq 0$ donc $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

6°) $u(u(b))$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u(u(b)) = -b$

$$Mat_{\beta'}(u) = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(u(b)) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ u(b) \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1°) Montrer que u est linéaire.

2°) Déterminer une base de $Ker(u)$ et une base de $Im(u)$.

3°) A-t-on $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Correction

1°) Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Soient λ et μ deux réels.

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

$$\begin{aligned}
u(\lambda x + \mu y) &= (-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_3 \\
&\quad + \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)) \\
&= (\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3], \lambda[-x_1 + x_3] \\
&\quad + \mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3]) \\
&= \lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3) \\
&\quad + \mu(-2y_1 + 4y_2 + y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y)
\end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2°) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(u)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned}
x \in Ker(u) \Leftrightarrow AX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\
x &= \left(x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3 \right) = \frac{x_3}{2} (2, -1, 2)
\end{aligned}$$

$a = (2, -1, 2)$ est un vecteur non nul qui engendre $Ker(u)$, c'est une base de $Ker(u)$.

$$Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(Im(u)) = 3 \Leftrightarrow \dim(Im(u)) = 2$$

$u(e_1) = -2e_1 - e_2 - 2e_3$ et $u(e_2) = 4e_1 + 4e_3$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(u)$ qui est de dimension 2, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base de $Im(u)$.

3°) $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (a, u(e_1), u(e_2))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

$$\det(a, u(e_1), u(e_2)) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

En additionnant les deux premières colonnes sur la première colonne.

$$\det(a, u(e_1), u(e_2)) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Donc on n'a pas $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (a, u(e_1), u(e_2))$.

Exercice 4 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

1°) Calculer $\Delta = \det(A)$

2°) Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annule Δ .

Correction

1°)

$$\begin{array}{cccc|ccc}
C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 \\
\hline
a & a & a & a & a & 0 & 0 \\
a & b & b & b & a & b - a & b - a \\
a & b & c & c & a & b - a & c - a \\
a & b & c & d & a & b - a & c - a
\end{array} =
\begin{array}{ccc|ccc}
& & & C_4 - C_1 & & & \\
& & & 0 & & & \\
& & & b - a & & b - a & b - a \\
& & & c - a & & c - a & c - a \\
& & & d - a & & & \\
& C_1 & C_2 & C_3 & C_1 & C_2 - C_2 & C_3 - C_1 \\
& 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
& b - a & c - a & c - a & b - a & c - b & c - b \\
& b - a & c - a & d - a & b - a & c - b & d - b \\
& c - b & c - b & c - b & 1 & 1 & 1 \\
& c - b & d - b & d - b & c - b & d - b & d - b
\end{array} = a(b - a) \begin{array}{ccc|ccc}
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & &
\end{array} = a(b - a) \begin{array}{ccc|ccc}
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & &
\end{array} = a(b - a)(c - b) \begin{array}{ccc|ccc}
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
& & & & & &
\end{array} = a(b - a)(c - b)(d - c)$$

$$2^{\circ}) \Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ ou \\ a = b \\ ou \\ b = c \\ ou \\ c = d \end{cases}$$

Exercice 5 :

Soit u une application linéaire de E dans E , E étant un espace vectoriel de dimension finie et pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2 \dim(Im(u))$

(b) $Im(u) = Ker(u)$

Correction

Si (a) alors

Si $y \in Im(u)$ alors il existe $x \in E$ $y = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in Ker(u)$

Donc $Im(u) \subset Ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim E \Leftrightarrow \dim(Ker(u)) + \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow \dim(Ker(u)) = \frac{n}{2}$$

$Im(u) \subset Ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

(b) D'après le théorème du rang

$$\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim E \Leftrightarrow 2 \dim(Im(u)) = n \Leftrightarrow 2 \operatorname{rg}(u) = n$$

Pour tout $x \in E$, $u(x) \in Im(u)$ donc $u(x) \in Ker(u)$ donc $u(u(x)) = 0_E$ donc $u^2 = O_E$.

Exercice 6

Soient $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X - X^2$ et $P_2 = 1 - X - X^2$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle libre ?

Correction

$$\begin{aligned}
\alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 = 0 &\Leftrightarrow \alpha + \beta(1 + X - X^2) + \gamma(1 - X - X^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + (\beta - \gamma)X - (\beta + \gamma)X^2 \\
&= 0 \Leftrightarrow L_1 \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ L_3 \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ L_3 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc cette famille est libre.