Contrôle Continu Ecrit Mi-Parcours: Math II Algèbre (12 Novembre 2009)

Avant propos : La durée de l'examen est de 1h:50. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

A. Questions de Cours:

Exercice A-I (7 points) Soit V un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et E un sous-espace de V.

1. (1 point) Compléter la définition suivante: On dit qu'un système $(x_1, \ldots, x_m)$ de vecteurs de E est *libre* sur $\mathbb{R}$ lorsque : ...

2. (1 point) Compléter la définition suivante: On dit qu'un système $(y_1, \ldots, y_n)$ de vecteurs de E est *générateur de* E lorsque : ...

3. (5 points) Montrer que si $(x_1, \ldots, x_m)$ est un système libre de E et $(y_1, \ldots, y_n)$ est un système générateur de E, alors $m \leq n$.

B. Questions de TD:

Exercice B-I (3 points) Soit $\mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les familles suivantes, déterminer celles qui sont libres :

1. (1 point) $\{1, \sin x, \cos x\}$.

2. (1 point) $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos(2x)\}$.

3. (1 point) $\{e^x, e^{2x}\}$.

Exercice B-II (3 points) Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z).$$

1. (1 point) Montrer que l'application T est linéaire.

2. (1 points) Déterminer une base et la dimension de Ker(T).

3. (1 point) En déduire que T est surjective.

C. Questions Divers:

Exercice C-I (5 points) Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif, V un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension finie, V_1 et V_2 deux sous-espaces de V.
On définit le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ où la somme est définie par

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$

et le produit par un scalaire est défini par

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

1. (2 points) Montrer que $\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

2. (2 points) Soit T l'application linaire

$$T : V_1 \times V_2 \to V$$

définie par

$$T(v_1, v_2) = v_1 + v_2.$$

Montrer que T est injective si et seulement si $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$.

3. (1 point) En déduire que

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V).$$

Exercice C-II (2 points) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire telle que la composition $T \circ T = 0$. Montrer que T n'est pas surjective.