Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Math II Algèbre - Contrôle Continu Partiel

(Corrigé)

Exercice A (7 points)

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et E un sous-espace de V.

1. **(1 point) Compléter la définition suivante : On dit qu'un système $(x_1, \dots, x_m)$ de vecteurs de E est libre sur $\mathbb{R}$ lorsque :**
   ...lorsque si $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ sont des réels, on a l'implication suivante :
   $$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$
2. **(1 point) Compléter la définition suivante : On dit qu'un système $(y_1, \dots, y_n)$ de vecteurs de E est générateur de E lorsque :**
   ...lorsque pour tout vecteur u de E, il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que
   $$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$
3. **(5 points) Montrer que si $(x_1, \dots, x_m)$ est un système libre de E et $(y_1, \dots, y_n)$ est un système générateur de E, alors $m \leq n$.**
   Supposons que $m \geq n+1$.
   $x_1 \in E$, donc x_1 est combinaison linéaire des éléments $y_1, \dots, y_n$ qui génèrent E.
   On peut écrire $x_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ avec les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ non tous nuls puisque $x_1 \neq 0$.
   Par exemple $\alpha_n \neq 0$. On a alors :
   $$y_n = \frac{1}{\alpha_n} x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}$$
   $(x_1, y_1, \dots, y_n)$ est une famille génératrice de E et y_n est combinaison linéaire des autres de cette famille. On en déduit que $(x_1, y_1, \dots, y_{n-1})$ est génératrice de E.
   On recommence le raisonnement..., et on a arrive à $(x_n \dots, x_1)$ génératrice de E.
   Ainsi, x_{n+1} est combinaison linéaire de $(x_n, \dots, x_1)$, ce qui est impossible puisque $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.
   La condition $m \geq n+1$ est ainsi impossible et on a donc $m \leq n$.

Exercice B-I (3 points)

Soit $\mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les familles suivantes, déterminer celles qui sont libres :

1. **(1 point)** $\{1, \sin x, \cos x\}$
   Supposons qu'il existe α, β, γ dans $\mathbb{R}$ tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha + \beta \sin x + \gamma \cos x = 0$$
   En $x = 0$, on obtient, $\alpha + \gamma = 0$. En $x = \pi$, on obtient $\alpha - \gamma = 0$.
   On obtient déjà que $\alpha = \gamma = 0$. Puis, en remplaçant, on obtient $\beta = 0$.
   La famille est donc bien libre.

2. **(1 point)** $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos(2x)\}$
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. La famille est donc liée.
3. **(1 point)** $\{e^x, e^{2x}\}$
   Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} = \alpha e^x$$

   En $x = 0$, on obtient $1 = \alpha$, donc α devrait être égal à 1. Or, $e^2 \neq 1 \times e^1$, impossible. Donc la famille est libre.

Exercice B-II (3 points)

Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z)$$

1. **(1 point) Montrer que l'application T est linéaire.**
   Soient (x, y, z, w) et (x', y', z', w') dans $\mathbb{R}^4$ et prenons un réel λ.

   $$\begin{aligned} T(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda w + w') &= (\lambda x + x', \lambda(x + y) + x' + y, \lambda(x + y + z) + x' + y' + z') \\ &= \lambda T(x, y, z, w) + T(x', y', z', w') \end{aligned}$$

   T est bien linéaire.
2. **(1 point) Déterminer une base et la dimension de Ker(T).**
   Soit $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

   $$(x, y, z, w) \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(x, y, z, w) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ x + y & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x, y, z, w) = (0, 0, 0, w)$$

   Donc $\mathrm{Ker}(T) = Vect((0, 0, 0, 1))$. Comme le noyau est engendré par un vecteur, c'est une base, et la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$ est donc égale à 1.
3. **(1 point) En déduire que T est surjective.**
   Avec le théorème du rang : On sait que $\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathbb{R}^4)$. On en conclut que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est donc $\mathbb{R}^3$ tout entier : T est surjective.
   Sans le théorème du rang : Déterminons l'image de T.
   On a directement

   $$\mathrm{Im}(T) = Vect\,((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$$

   Comme la famille est libre (étagée), et de cardinal 3 dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est une base donc génératrice de tout $\mathbb{R}^3$. Ainsi, T est surjective.

Exercice C-I (5 points)

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, V_1 et V_2 deux sous-espaces de V.

On définit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \ / \ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ où la somme est définie par

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$

et le produit par un scalaire est défini par

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

1. **(2 points) Montrer que $\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.**

   Puisque V est de dimension finie, V_1 et V_2 le sont également.

   Prenons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V_1 et $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de V_2.

   Montrons que $\mathcal{B} = ((e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, u_1), \ldots, (0, u_p))$ est une base de $V_1 \times V_2$.

   Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que

   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j(0, u_j) = 0$$

   On a alors $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j u_j\right) = (0, 0)$, d'où $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j u_j = 0$ et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$ puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ sont libres.

   Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre.

   Soit $(x_0, y_0) \in V_1 \times V_2$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ engendrent respectivement V_1 et V_2, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y_0 = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j u_j$. On a alors

   $$(x_0, y_0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j(0, u_j)$$

   Ainsi, $\mathcal{B}$ engendre $V_1 \times V_2$. Donc

   $$\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

2. **(2 points) Soit T l'application linéaire $T : V_1 \times V_2 \to V$ définie par $T(v_1, v_2) = v_1 + v_2$. Montrer que T est injective si et seulement si $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$.**

   Supposons que T est injective. Cela implique que $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$ puisque si $f(x) = 0 = f(0)$, cela implique $x = 0$.

   Or, $\operatorname{Ker}(T) = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \ / \ v_1 + v_2 = 0\} = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \ / \ v_1 = -v_2\} = V_1 \cap V_2$. Ainsi, comme $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$, on a bien $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$.

   Réciproquement, supposons que $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$, autrement-dit, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

   Montrer que T est injective. Soient (v_1, v_2) et (v_1', v_2') dans $V_1 \times V_2$ tels que $T(v_1, v_2) = T(v_1', v_2')$, c'est-à-dire :

   $$v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$$

   ou bien

   $$v_1 - v_1' = v_2' - v_2$$

   Le membre de gauche appartient à V_1, celui de droite est dans V_2. Ainsi, $v_1 - v_1'$ et $v_2' - v_2$ sont dans $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. On en déduit que $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$. T est bien injective.

3. **(1 point) En déduire que** $\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V)$.
On sait la relation

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2)$$

Or $V_1 + V_2 \subset V$, donc $\dim(V_1 + V_2) \leq \dim(V)$, qui équivaut à $-\dim(V_1 + V_2) \geq -\dim(V)$ et on a donc l'inégalité voulue :

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) \geq \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V)$$

Exercice C-II (2 points)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire telle que la composition $T \circ T = 0$. Montrer que T n'est pas surjective.

Supposons que T soit surjective. Alors pour tout y dans $\mathbb{R}^n$, il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = T(x)$. On aurait alors $T(y) = T^2(x) = 0$ par hypothèse. Donc y serait dans le noyau de T. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}^n$, et donc $T = 0$. La seule image par l'application T serait 0, ce qui est en contradiction avec le fait que T est surjective.