Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Fiche 1
Systèmes linéaires

Exercice 1

Déterminer selon les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ si le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x + y & = & 1 \\ x + \lambda y & = & 1 \end{array} \right.$$

admet aucune solution, une unique solution, ou bien une infinité de solutions.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x + y + z & = & 5 \\ 2x + 13y - 7z & = & -1 \\ x - y + z & = & 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y - 7z + t & = & 1 \\ 2x + 2y + z + 2t & = & 0 \\ x - y - 2z + t & = & -1 \\ x + 7y - 4z + t & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z + t & = & 1 \\ 2x + y + z + t & = & 2 \\ x + 2y + 2z & = & 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 14 \\ x - 2z & = & 14 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -x + 2y + 3z & = & 2 \\ 4x + 5y + 6z & = & 0 \\ 7x + 8y + 9z & = & 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcr} 3x - 4y + 2z + t & = & 1 \\ y + z - t & = & 0 \\ -3x + 6y - 3t & = & -1 \end{array} \right.$$

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants, en fonction du paramètre réel m :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} (1+m^2)x - 3y & = & 5 \\ 4y + 3z & = & 8 \\ mz & = & 4 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcr} mx + y + z & = & m^2 \\ x + my - mz & = & m \\ x - y + mz & = & 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 2 \\ 2x + 6y - 4z & = & 2 \\ -3x - 9y + 6z & = & m - 5 \end{array} \right.$$

Exercice 4

Résoudre le système suivant, en fonction des paramètres complexes λ et μ.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 2 \\ x - y + z & = & 4 \\ 2x + y + 3z & = & \lambda \\ -x + 2y + z & = & \mu \end{array} \right.$$

Exercice 5

On considère le système réel suivant : $\left(S_{(a,b,c)}\right) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & a \\ -2x - 3y + 3z & = & b \\ x + y - 2z & = & c \end{array} \right.$.

Déterminer une condition sur a, b et c pour que le système $\left(S_{(a,b,c)}\right)$ admette au moins une solution. Puis résoudre $\left(S_{(0,0,1)}\right)$, $\left(S_{(1,-2,1)}\right)$, $\left(S_{(1,2,1)}\right)$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant, selon les valeurs des complexes a, b, c, α :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + \alpha y + \alpha^2 z & = & a \\ \overline{\alpha} x + y + \alpha z & = & b \\ \overline{\alpha}^2 x + \overline{\alpha} y + z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 7

Montrer qu'il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}, \qquad \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

Exercice 8

Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$ est surjective.

Exercice 9

Déterminer $g(\mathbb{R}^2)$ et $h(\mathbb{R}^3)$ pour :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x-y, -x+2y, 5x-y) \end{array}, \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x+y+z, x-2y) \end{array}$$