Fiche 2
Espaces vectoriels

Exercice 1

On considère sur $\mathbb{C}^2$ la loi $\top$ définie par

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2, \quad (x_1, x_2) \top (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$$

et la loi externe $\cdot$ usuelle : $\alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.
$(\mathbb{C}^2, \top, \cdot)$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 2

1. Déterminer si les ensembles suivants sont ou non des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{ll} A = \{(x, 2x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}, & F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4x + 5y = 0\}, \\ B = \{(1, y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}, & G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\}, \\ C = \{(|x|, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}, & H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \ln(1 + x)\}, \\ D = \{(x, x + 1) \ / \ x \in \mathbb{R}\}, & I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 4\}. \end{array}$$

2. Déterminer si les ensembles suivants sont ou non des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0\}, \quad B = \{(x, x + y, x - y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. Déterminer si les ensembles suivants sont ou non des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{C}^3$.

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + iz = 0 \\ -x - 2y + (1 + i)z = 1 \end{array} \right. \right\}, \quad B = \{(a, 0, ia) \ / \ a \in \mathbb{C}\}.$$

4. Déterminer si les ensembles suivants sont ou non des sous-espaces vectoriels de $E = R[X]$.

$$\begin{array}{ll} A = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(3) = 1\}, & C = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) \geq 8\}, \\ B = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(3) = 0\}, & D = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P + P' = 0\}. \end{array}$$

5. Déterminer si les ensembles suivants sont ou non des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\begin{array}{ll} A = \{f \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}, & D = \{f \in E \ / \ f \text{ 2 fois dérivable sur } \mathbb{R}, f'' + f = 0\}, \\ B = \{f \in E \ / \ f(2) = 0\}, & F = \{f \in E \ / \ f \ 2\pi - \text{périodique}\}. \\ C = \{f \in E \ / \ f(0) = 3\}, & \end{array}$$

6. Déterminer si les ensembles suivants sont ou non des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{l} A = \{(u_n) \in E \ / \ \lim\limits_{n\infty} u_n = 0\}, \\ B = \{(u_n) \in E \ / \ u_2 = u_{10} = 0\}, \\ C = \{(u_n) \in E \ / \ u_2 = 3, u_{10} = 0\}. \end{array}$$

Exercice 3

Dans les exemples qui suivent, déterminer si C est (ou non) une combinaison linéaire de A et de B.

1. $E = \mathbb{C}^2$,
$$A = (1, 1+i), \quad B = (2-3i, -i), \quad C = \left(1+i, i+\frac{2}{3}\right).$$
2. $E = \mathbb{R}^3$,
$$A = (1,1,2), \quad B = (3,0,1), \quad C = (5,2,5).$$
3. $E = \mathbb{R}[X]$,
$$A = X^2 + X + 1, \quad B = X^2 - X + 1, \quad C = X^2 + 1.$$
4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
$$A : x \mapsto \cos(x), \quad B : x \mapsto \sin(x), \quad C : x \mapsto \cos(2x).$$
5. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
$$A : x \mapsto x+1, \quad B : x \mapsto x-1, \quad C : x \mapsto |x|.$$

Exercice 4

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose les vecteurs $a = (1,0,1)$, $b = (1,0,0)$ et $c = (2,0,3)$.
Déterminer $Vect(a,b)$, $Vect(b,c)$, $Vect(a,b,c)$.

Exercice 5

Dans les différents cas suivants, a-t-on $E = Vect(A,B,C)$?

1. $E = \mathbb{C}^3$,
$$A = (1,2,0), \quad B = (1,0,1), \quad C = (0,1,1).$$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$,
$$A = X^2 + X + 1, \quad B = X^2 + X, \quad C = X^2.$$
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$,
$$A = 1, \quad B = X - 1, \quad C = (X-1)^2.$$
4. $E = \mathbb{R}[X]$,
$$A = 1, \quad B = X - 1, \quad C = (X-1)^2.$$

Exercice 6

Pour chacune des familles suivantes, déterminer si elle est libre ou liée :

1. $E = \mathbb{R}^4$,
$$a = (1,1,1,1), \quad b = (-2,0,3,1), \quad c = (0,1,0,1).$$
2. $E = \mathbb{R}^3$,
$$a = (4,2,1), \quad b = (6,6,6), \quad c = (-2,2,4).$$
3. $E = \mathbb{R}[X]$,
$$P = 1, \quad Q = X - 1, \quad R = X + 2.$$
4. $E = \mathbb{C}[X]$,
$$P = 1 + X + X^2, \quad Q = 1 - X + iX^2, \quad R = 1 + X - X^2.$$
5. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
$$f : x \mapsto \cos(x), \quad g : x \mapsto \cos(2x), \quad h : x \mapsto \cos(3x).$$
6. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
$$u_n = 2^n, \quad v_n = 3^n, \quad w_n = 4^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 7

Dans chacun des exemples suivants, déterminer si F est un sous-espace vectoriel de E et si oui, en déterminer une base :

1. $E = \mathbb{R}[X]$,
$$F = \{\alpha X + 5\beta X^2 - \alpha X^3, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$
2. $E = \mathbb{R}^4$,
$$F = \{(-a, 0, 1, 2a), \quad a \in \mathbb{R}\}.$$
3. $E = \mathbb{R}^4$,
$$F = \{(x, y - 2x, x + y, y + 3x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$
4. $E = \mathbb{R}^3$,
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\}.$$
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$,
$$F = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}.$$
6. $E = \mathbb{R}_3[X]$,
$$F = \{P \in E \ / \ P'(1) = 0\}.$$
7. $E = \mathbb{R}^4$,
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z + t = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille proposée est une base de l'espace vectoriel E.

1. $E = \mathbb{R}^3$,
$$e_1 = (1, 2, 3), \quad e_2 = (1, 4, 9), \quad e_3 = (1, 8, 27).$$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$,
$$P_0 = (X - 1)(X - 2), \quad P_1 = X(X - 2), \quad P_3 = X(X - 1).$$
3. $E = \mathbb{R}_4[X]$,
$$P_0 = X^3 + X^2, \quad P_1 = X^2 + X, \quad P_2 = X^2 + 1, \quad P_3 = X^3 + X, \quad P_4 = X^3 + X^2 + X.$$
4. $E = \mathbb{R}_3[X]$,
$$P_0 = X^3 + X^2, \quad P_1 = X^2 + X, \quad P_2 = X^2 + 1, \quad P_3 = X^3 + X, \quad P_4 = X^3 + X^2 + X.$$

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les parties suivantes :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ / \ 2x + y = 0 \text{ et } t = -x + 3z\},$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ / \ x + 2y + 3z + t = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et en donner des bases.
2. Déterminer $F \cap G$ et en donner des bases.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les parties suivantes :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ / \ x + 2y - z = 0\},$$

$$G = \{(a, a + b, b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en donner des bases.
2. Déterminer $F \cap G$ et en donner des bases.

Exercice 11

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y + z = 0\}.$$

1. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
2. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 12

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 3y + 4z = 0\},$$

$$G = Vect((1, 0, 0)).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Doner un autre sous-espace vectoriel supplémentaire de F.