Fiche 3
Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe $(3x + 2y + z, 2x + 3y + 2z, -4x - y)$.
Déterminer le noyau et l'image de f, en déterminer une base et leur dimension.

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x+z+2t, x+y-t, 2x+y+z+t, -y+z+t)$.
Déterminer le noyau et l'image de f, en déterminer une base et leur dimension.

Exercice 3

Soient les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + z - 3t = 0\}$$

$$G = \{(x, t, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + z = 0 \text{ et } 2y - z + t = 0\}$$

$$H = \{(a + b, 2a - b, b, 3a) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, en déterminer des bases et leur dimension.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants :

$$u = (1, 0, 1, 0), \quad v = (0, 1, -1, 0), \quad w = (1, 1, 1, 1), \quad x = (0, 0, 1, 0), \quad y = (1, 1, 0, -1)$$

Soient $F = Vect(u, v, w)$ et $G = Vect(x, y)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, 1, 2), \quad u_2 = (0, 1, 4), \quad u_3 = (1, 0, -2), \quad u_4 = (-5, 16, 24), \quad u_5 = (1, 0, 1)$$

1. Les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 forment-ils une famille libre ?
2. Les vecteurs u_2, u_3, u_5 forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6

On pose $P = (X + 1)^3, Q = (X - 1)^3, R = X^3 + 3X$ et $S = X^2 + 1$.
(P, Q, R, S) forment-ils une famille libre ? une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$? de $\mathbb{R}_3[X]$? de $\mathbb{R}_4[X]$?
Déterminer une base de $Vect(P, Q, R, S)$.

Exercice 7

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on posse $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout $q \in \{0, \ldots, n\}$, déterminer les coordonnées de X^q dans cette base.
   (Indication : on pourra utiliser le fait que $X^q = X^q\left((1 - X) + X\right)^{n-q}$).

Exercice 8

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base (e_1, e_2, e_3). On y définit les vecteurs

$$a = 3e_1 + e_2 - e_3, \quad b = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad c = e_2 - e_3, \quad d = 4e_1 + 6e_2 - 4e_3$$

1. La famille (a, b, c, d) est-elle une base de E ?
2. Les trois vecteurs a, b et c forment-ils une base de E ? Si oui, préciser les coordonnées du vecteur e_1 dans cette base.
3. Déterminer la dimension et une base de $Vect(a, b, d)$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E. Etudier si (a, b, c, d) est une base de E dans les cas suivants :

1. $$a = e_1 + e_1 + e_3 + e_4, \quad b = e_1 - 2e_2 + 3e_3, \quad c = e_1 + 3e_3, \quad d = e_1 + 3e_3$$
2. $$a = e_1 + 4e_2 + e_3 + e_4, \quad b = e_1 - 2e_2 + 3e_3, \quad c = e_1 + 3e_3, \quad d = e_1 + e_4$$

Exercice 10

Pour a réel, montrer que $\big((1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer ses coordonnées dans cette base.

Exercice 11

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer la dimension de $Vect(f, g, h, k)$ avec :

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto e^x, \quad h : x \mapsto e^{x+1}, \quad k : x \mapsto x$$

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Déterminer si les familles suivantes forment une base de E :

1. $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_1 + e_2, e_1 +, e_3, \dots, e_1 + e_{n-1}, e_1 + e_n)$.
2. $\mathcal{B}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$.
3. $\mathcal{B}_3 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$.