Fiche 3 - Exercices 8 à 12

Exercice 8

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base (e_1, e_2, e_3). On y définit les vecteurs

$$a = 3e_1 + e_2 - e_3, \quad b = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad c = e_2 - e_3, \quad d = 4e_1 + 6e_2 - 4e_3$$

1. **La famille (a, b, c, d) est-elle une base de E ?**
   L'espace vectoriel E admet (e_1, e_2, e_3) pour base, il est donc de dimension 3. La famille (a, b, c, d) comprenant 4 vecteurs, c'est nécessairement une famille liée. Elle ne peut donc pas être une base de E.
2. **Les trois vecteurs a, b et c forment-ils une base de E ? Si oui, préciser les coordonnées du vecteur e_1 dans cette base.**
   Comme on a exactement 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de regarder que la famille (a, b, c) est libre pour voir si c'est une base ou non.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$.
   On a alors : $\lambda_1(3e_1 + e_2 - e_3) + \lambda_2(e_1 - 2e_2 + e_3) + \lambda_3(e_2 - e_3) = 0$, autrement dit,

$$(3\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)e_2 + (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)e_3 = 0$$

   Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, c'est une famille libre. Comme la combinaison linéaire est nulle, les coefficients sont tous nuls :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda_1 + \lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 &=& -3\lambda_1 \\ \lambda_2 &=& 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 &=& 0\lambda_1 \\ \lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_1 &=& 0 \end{array}\right.$$

   La famille est donc libre, c'est une base de E.

   Exprimons le vecteur e_1 dans la base (a, b, c). Il faut donc déterminer les coefficients réels α, β, γ tels que

$$e_1 = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

   On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3e_1 + e_2 - e_3 &=& a \\ e_1 - 2e_2 + e_3 &=& b \\ e_2 - e_3 &=& c \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 3e_1 + e_2 - e_3 &=& a \\ -5e_2 + 4e_3 &=& b - 3a \\ e_2 - e_3 &=& c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 5L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 3e_1 + e_2 - e_3 &=& a \\ -5e_2 + 4e_3 &=& b - 3a \\ -e_3 &=& 5c + b - 3a \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 5L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} e_1 &=& \frac{1}{3}(a - c) \\ e_2 &=& 3a - b - 4c \\ e_3 &=& 3a - b - 5c \end{array}\right.$$

   Ainsi, on a

$$e_1 = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}c$$

   Les coordonnées de e_1 dans la base (a, b, c) sont donc $\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$.

3. **Déterminer la dimension et une base de $Vect(a,b,d)$.**
Regardons si la famille (a,b,d) est libre.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha a + \beta b + \gamma d = 0$.
On a alors : $\alpha(3e_1+e_2-e_3)+\beta(e_1-2e_2+e_3)+\gamma(4e_1+6e_2-4e_3)=0$, autrement dit,

$$(3\alpha+\beta+4\gamma)e_1+(\alpha-2\beta+6\gamma)e_2+(-\alpha+\beta-4\gamma)e_3=0$$

Comme (e_1,e_2,e_3) est une famille libre, et que la combinaison linéaire est nulle, les coefficients sont tous nuls :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\alpha+\beta+4\gamma &=& 0 \\ \alpha-2\beta+6\gamma &=& 0 \\ -\alpha+\beta-4\gamma &=& 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-3L_2 \\ L_3\leftarrow L_3+L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \alpha-2\beta+6\gamma &=& 0 \\ \beta-2\gamma &=& 0 \\ -\beta+2\gamma &=& 0 \end{array}\right.$$

Comme les deux dernières équations sont identiques, ce système admet une infinité de solutions, et la famille (a,b,d) est donc liée. En effet, on pouvait voir que

$$-2a+2b+d=0$$

On a donc $\dim Vect(a,b,d)<3$. Or, a et b sont deux vecteurs non colinéaires, donc $Vect(a,b,d)$ est au moins de dimension 2, puisqu'il contient $Vect(a,b)$. Ainsi, $Vect(a,b,d)=Vect(a,b)$ qui est de dimension 2.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel et (e_1,e_2,e_3,e_4) une base de E. Etudier si (a,b,c,d) est une base de E dans les cas suivants :

1. $$a=e_1+e_1+e_3+e_4, \quad b=e_1-2e_2+3e_3, \quad c=e_1+3e_3, \quad d=e_1+3e_3$$

   On a $c=d$. La famille (a,b,c,d) est donc liée et ne peut pas être une base.

2. $$a=e_1+4e_2+e_3+e_4, \quad b=e_1-2e_2+3e_3, \quad c=e_1+3e_3, \quad d=e_1+e_4$$

   On a quatre éléments dans un espace vectoriel de dimension 4. Pour vérifier que c'est une base, il suffit de regarder si c'est une famille libre.
   Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} & \lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c+\lambda_4 d=0 \\ \Longrightarrow & \lambda_1(e_1+4e_2+e_3+e_4)+\lambda_2(e_1-2e_2+3e_3)+\lambda_3(e_1+3e_3)+\lambda_4(e_1+e_4)=0 \\ \Longrightarrow & (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)e_1+(4\lambda_1-2\lambda_2)e_2+(\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3)e_3+(\lambda_1+\lambda_4)e_4=0 \\ \underset{\text{famille libre}}{\Longrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &=& 0 \\ 4\lambda_1-2\lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_1+\lambda_4 &=& 0 \end{array}\right. \\ \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_1+\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2 &=& 2\lambda_1 \\ 7\lambda_1+3\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_4 &=& -\lambda_1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

   Avec les premières et troisièmes lignes, on voit que $\lambda_1=\lambda_3=0$ et on en déduit que $\lambda_2=\lambda_4=0$. Ainsi, la famille est bien libre, c'est une base de E.

Exercice 10

Pour a réel, montrer que $\big((1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer ses coordonnées dans cette base.

Notons $P_0 = 1$, $P_1 = X - a$, $P_2 = (X-a)^2$, $\dots$, $P_n = (X-a)^n$.

On a $n+1$ polynômes, dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Pour montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit donc de montrer que la famille est libre. Or, les polynômes P_0, P_1, P_n sont de degrés étagés (ils sont tous de degrés différents). Ainsi, ils forment une famille libre et c'est donc une base.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ à déterminer tels que

$$P(X) = \lambda_0 + \lambda_1(X-a) + \lambda_2(X-a)^2 + \lambda_3(X-a)^3 + \dots \lambda_n(X-n)^n$$

Si on prend la valeur de P en a, on obtient : $P(a) = \lambda_0 + 0$. D'où $\lambda_0 = P(a)$.

Puis,

$$P'(X) = 1.\lambda_1 + 2\lambda_2(X-a) + 3\lambda_3(X-a)^2 + \dots n\lambda_n(X-n)^{n-1}$$

Si on prend la valeur de P' en a, on obtient : $P'(a) = 1.\lambda_1 + 0$. D'où $\lambda_1 = \dfrac{P'(a)}{1}$.

Puis,

$$P''(X) = 2.1\lambda_2 + 3.2\lambda_3(X-a) + \dots n(n-1)\lambda_n(X-n)^{n-2}$$

Si on prend la valeur de P'' en a, on obtient : $P''(a) = 2.1\lambda_2 + 0$. D'où $\lambda_2 = \dfrac{P''(a)}{2.1}$.

Si on écrit formellement une récurrence, on montre ainsi que pour tout $k = 1 \dots n$, $\lambda_k = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$.

Ainsi, on obtient la formule suivante, appelée Formule de Taylor,

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2}(X-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Exercice 11

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer la dimension de $Vect(f, g, h, k)$ avec :

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto e^x, \quad h : x \mapsto e^{x+1}, \quad k : x \mapsto x$$

On cherche une base de $Vect(f, g, h, k)$ afin de déterminer sa dimension. Déjà, on peut remarquer que $h(x) = e^{x+1} = e \times e^x = eg(x)$. Autrement-dit, $h = e \times g$ avec $e \in \mathbb{R}$. La famille (g, h) est donc liée, on peut donc enlever h dans le $Vect$.

On cherche donc une base de $Vect(f, g, k)$. La famille (f, g, k) est-elle libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 k = 0$.

Alors, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 x = 0$$

On peut prendre trois valeurs particulières pour x, par exemple $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ On obtient alors un système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 e + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \frac{1}{e} - \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -\lambda_2 \\ \lambda_2(e-1) + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2\left(\frac{1}{e} - 1\right) - \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, la famille (f, g, k) est libre, c'est donc une base de $Vect(f, g, k) = Vect(f, g, h, k)$. On en déduit alors que la dimension de $vect(f, g, h, k)$ est 3.

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Déterminer si les familles suivantes forment une base de E :

1. $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_1 + e_2, e_1+, e_3, \ldots, e_1 + e_{n-1}, e_1 + e_n)$.
   On a n vecteurs dans E qui est de dimension n. Pour montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base, il suffit de vérifier que $\mathcal{B}_1$ est libre.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_3) + \ldots + \lambda_{n-1}(e_1 + e_{n-1}) + \lambda_n(e_1 + e_n) = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n)e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{n-1}e_{n-1} + \lambda_n e_n = 0$$

   Comme $\mathcal{B}$ est une base, $\mathcal{B}$ est libre et donc on a

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \ldots \qquad \lambda_n = 0$$

   Ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. La famille est bien libre. $\mathcal{B}_1$ est donc une base de E.
2. $\mathcal{B}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$.
   $\mathcal{B}_2$ contient $n - 1$ vecteurs en dimension 2. La famille ne peut donc pas être une base (pas assez de vecteurs).
3. $\mathcal{B}_3 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$.
   On a n vecteurs dans E qui est de dimension n. Pour montrer que $\mathcal{B}_3$ est une base, il suffit de vérifier que $\mathcal{B}_3$ est libre.
   Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda_1(e_1 + e_2) + \lambda_2(e_2 + e_3) + \lambda_3(e_3 + e_4) + \ldots + \lambda_{n-1}(e_{n-1} + e_n) + \lambda_n(e_n + e_1) = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 + \lambda_n)e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_3 + \ldots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)e_n = 0$$

   Puisque $\mathcal{B}$ est une base, on peut écrire que :

$$\left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \ldots \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{array} \right.$$

   On a donc $\lambda_n = -\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda_4 = \ldots = (-1)^n \lambda_n$.

   1er cas : n est impair. On obtient $\lambda_n = -\lambda_n$. Ainsi, $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. La famille est alors libre, et c'est une base de E.

   2ème cas : n est pair. Alors, en posant $\lambda_n = 1$, on obtient une combinaison linéaire :

$$(e_1 + e_2) - (e_2 + e_3) + (e_3 + e_4) - \ldots + (e_{n-1} + e_n) - (e_n + e_1) = 0$$

   La famille est alors liée, ce ne peut pas être une base de E.