Université Claude Bernard Lyon 1 — 2009-2010

L1 MATH II Algèbre

Fiche 4
Applications linéaires

Exercice 1

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que :
$$f(1,0,0) = (0,1), \qquad f(1,1,0) = (1,0), \qquad f(1,1,1) = (1,1)$$
2. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.
4. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que :
$$f(1,2) = (1,1,0), \qquad f(2,1) = (0,1,1)$$
2. Déterminer $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.
4. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. On considère l'application $f : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ définie par
$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad f(P) = XP' - P$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.
3. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n tels que $f \circ g = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq Id_E$ et $(f - Id_E)^2 = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - Id_E) \subset \mathrm{Ker}(f - Id_E)$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(f - Id_E) = \mathrm{Ker}(f - Id_E)$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que sont équivalents :

(i) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
(ii) $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$
(iii) $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$
(iv) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
(v) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Montrer par condition nécessaire et suffisante que $E = \mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f \circ f = g$ et $f \circ f \circ g = f$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

(Indication : On pourra raisonner par une condition nécessaire et suffisante)

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel de dimension 4. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$ (on dit que f est *nilpotent* d'ordre 4.)
Soit $x_0 \in E$ tel que $f^3(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0))$ est une base de E.
2. Montrer que le rang de f est égal à 3.

Exercice 10

On considère $E = \mathbb{K}^3$ muni d'une base (e_1, e_2, e_3). On considère f l'endomorphisme de E défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $f^3 = Id_E$.
3. Montrer que $F = \{u \in \mathbb{K}^3 \ / \ f(u) = u\}$ est un sev de $\mathbb{K}^3$ et déterminer sa dimension.

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3$$

1. Déterminer l'image par f de tout vecteur $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base et la dimension.
4. Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \quad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \quad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Démontrer que $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
3. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.