Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 Maths II Algèbre

Fiche 5
Matrices I

---

1 Opérations sur les matrices

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, B$= \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A + B$, λA (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $A - B$.
2) Calculer $C + D$, λC (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $D - C$.
3) Peut-on calculer AB et CD ? Calculer AC et BD.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer AB et BA si cela est possible.
2) Ecrire ${}^tA$ et ${}^tB$.
3) Calculer ${}^tB{}^tA$. Comment peut-on vérifer le calcul ?

2 Applications linéaires et matrices

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y) = (x - 2y, 3y)$$

1) Déterminer la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.
2) On pose $u = e_1$ et $v = e_1 + e_2$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Définir analytiquement f.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

1) Définir analytiquement f.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 6. Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $A \mapsto A +^t A$.

1) Déterminer ker$f$ et Imf.
2) Montrer que Ker$f \oplus$ Imf $= \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer l'image du vecteur $(2, 1, -1)$ par f.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(A - 3\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(A - 6\,\mathrm{Id})$.
3) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit simple.

Exercice 8. Soit

$$\begin{array}{rcc} \mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \mapsto & a_{1,1} + \ldots + a_{n,n} \end{array}$$

appelée trace.

1) Montrer que tr est une forme linéaire.
2) Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3 Matrices inversibles et puissance de matrices

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour montrer que A est inversible. Préciser son inverse.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - 4A + 3\mathrm{I}$.
2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Trouver une matrice B telle que $A = 2I + B$.
2) Calculer B^2 et B^3.
3) En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer P^{-1}.
   b) Calculer $A' = P^{-1}AP$.
   c) Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.
2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et les relations de récurrence suivantes

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}.$$

Calculer u_n et v_n pour tout $n \geq 1$.

4 Changement de base

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,3,4)$ et $u_3 = (4,9,16)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1) Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exercice 14. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans le base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Démontrer que $f \circ f = 0$.
2) Trouver une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = 0$. Ecrire la matrice de f dans cette nouvelle base.
3) Retrouver les résultats précédents en appliquant la formule du changement de base.

Exercice 15. $\mathbb{C}^3$ est muni de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ tel que

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2i & -2i & 1 \\ 2(1+i) & 1+2i & -1+i \\ 1+2i & 1+i & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = -ie_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 - e_2 + ie_3$. On pose $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Déterminer la matrice de passage de P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ainsi que P^{-1}.
2) Déterminer $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$.
3) Montrer que u est inversible. Déterminer u^{-1} et A^{-1}.
4) Calculer A'^2. Qu'en conclure pour u^2 et A^2 ?
5) Déterminer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $u^2(f_1 + f_2 + f_3)$ et $\mathcal{B}'$ de $u^{-1}(e_1 + e_2 + e_3)$.