Fiche 7
Déterminants

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 7 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants de manière le plus factorisée possible.

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix}$$

$$F = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

On se donne les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1,1,1), \quad v = (2,3,4), \quad w = (4,9,16)$$

Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Soit le système (S) suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ 2x + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 3 \end{array} \right.$$

Montrer que ce système est de Cramer (i.e. qu'il admet une unique solution), et déterminer (x, y, z) à l'aide des formules de Cramer.

Exercice 7

Calculer par récurrence les déterminants suivants.

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_n , \qquad B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_n$$

$$C_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_n , \qquad D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

Exercice 8

Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $a \neq b$. Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}_n$$

Exercice 9

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels λ pour lesquels $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas inversible.
2. Déterminer les noyaux des $f - \lambda_I d_{\mathbb{R}^3}$ pour les λ obtenus.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est simple.