Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L1 MATH II Algèbre

Fiche 8
Révisions

Exercice 1

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Calculer $g(v)$.
2. Est-ce que g est injective ? Géométriquement $\mathrm{Ker}(g)$ représente un plan ou une droite ?
3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(g)$? Donner une base de $\mathrm{Im}(g)$. Est-ce que g est surjective ?
4. Soit $\mathcal{F}' = (f_1', f_2') = ((1, -1), (2, 0))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer $Q = mat_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}(Id)$, la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{F}'$.
5. Pourquoi Q est-elle inversible ? Justifier sans faire de calculs. Calculer Q^{-1}.
6. Donner une expression de $B = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}'}(g)$ (la matrice de g dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}'$) en fonction de A et Q. Calculer la matrice B.

Exercice 2

On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure naturelle de plan vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application suivante :

$$\varphi(z) = iz - \mathrm{Re}(z)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. Donner la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B} = (1, i)$.
3. Quelle est la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F} = (1 + i, 1 - i)$?
4. Donner une expression de la matrice B de φ dans la base $\mathcal{F}$ en fonction de A et de Q. Calculer B.

Exercice 3

On considère la matrice A à coefficients entiers

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice est inversible. Calculer son inverse.
2. Soit I_3 la matrice identité 3×3. Déduire de la question précédente que $A^n = I_3$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.
3. Utiliser la première question pour résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -x + 4y - 20z & = & 1 \\ -10x + 21y - 100z & = & -1 \\ -2x + 4y - 19z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 4

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$
2. En déduire que le rang de f est 1.
   (On pourra raisonner par l'absurde en considérant les autres rangs possibles de f).
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $C_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit A une matrice symétrique et inversible. Montrer que son inverse est symétrique.

Exercice 7

On considère une matrice inversible E de taille $n \times n$ à coefficient dans un corps $\mathbb{K}$. On notera P_E le polynôme

$$P_E(X) = \det(E - XI_n)$$

où X est une indéterminée et I_n la matrice identité $n \times n$. Montrer la formule suivante :

$$P_{E^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n X^n}{\det(E)} P_E\left(\frac{1}{X}\right)$$

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dont on désigne par $\mathcal{B}$ la base (a_1, a_2, a_3). On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f^2 = 5f - 4Id_E$ où Id_E désigne l'application identité de E.
2. En déduire que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 4Id_E) = \{0_E\}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 4Id_E)$ sont supplémentaires.
4. On pose $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 + a_2 - a_3$. Montrer que la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de E, base que l'on notera $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
7. Calculer A^n pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.