Fiche 8
Révisions (corrigé)

Exercice 1

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Calculer $g(v)$.**
   1ère méthode :
   Puisque g est une application linéaire, on a $g(v) = g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3)$.
   Or, d'après la matrice A, on sait que $g(e_1) = f_1 + 5f_2, \quad g(e_2) = 3f_1 + f_2, \quad g(e_3) = 4f_1 + f_2$
   On en déduit que $g(v) = x(f_1 + 5f_2) + y(3f_1 + f_2) + z(4f_1 + f_2) = (x + 3y + 4z)f_1 + (5x + y + z)f_2$.
   2ème méthode :
   On note V la matrice de v dans la base $\mathcal{E}$: $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On sait alors que $g(v)$ admet pour matrice dans la base $\mathcal{F}$ la matrice produit AV. On a $AV = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 4z \\ 5x + y + z \end{pmatrix}$.
   On en déduit donc que $g(v) = (x + 3y + 4z)f_1 + (5x + y + z)f_2$.
2. **Est-ce que g est injective ? Géométriquement Ker(g) représente un plan ou une droite ?**
   Puisque g est linéaire, on regarde le noyau de g : $\mathrm{Ker}(g)$.
   Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. D'après la question précédente,
   $$g(v) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y + 4z & = & 0 \\ 5x + y + z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y + 4z & = & 0 \\ -14y - 19z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{14}z \\ y & = & -\frac{19}{14}z \end{array} \right.$$
   On a donc $\mathrm{Ker}(g) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -19 \\ 14 \end{pmatrix}\right)$.
   Puisque $\mathrm{Ker}(g) \neq \{0\}$, g n'est pas injective. De plus, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$, donc $\mathrm{Ker}(g)$ représente géométriquement une droite vectorielle.
3. **Quelle est la dimension de Im(g) ? Donner une base de Im(g). Est-ce que g est surjective ?**
   D'après le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = 2$.
   $\mathrm{Im}(g)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 : c'est $\mathbb{R}^2$ tout entier. On a donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$, qui admet pour base $\mathcal{F}$. L'application g est ainsi surjective.
4. **Soit $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2) = ((1, -1), (2, 0))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer $Q = mat_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}(Id)$, la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{F}'$.**
   La matrice Q exprime (en colonne) les nouveaux vecteurs (ceux de $\mathcal{F}'$) dans l'ancienne base (la base $\mathcal{F}$). On a donc :
   $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
5. **Pourquoi Q est-elle inversible ? Justifier sans faire de calculs. Calculer Q^{-1}.**
   Q est inversible puisque c'est une matrice représentant la fonction identité Id_F, qui est bijective et donc inversible. On peut par exemple calculer Q^{-1} à l'aide de la formule de la comatrice : $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(Q)} {}^t\mathrm{com}(Q)$.
   On calcule facilement $\det(Q) = 2$, et $\mathrm{com}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

6. **Donner une expression de $B = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}'}(g)$ (la matrice de g dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}'$) en fonction de A et Q. Calculer la matrice B.**
   On a la relation
   $$B = Q^{-1}A$$
   En effet, en indiquant les bases, on a : $mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}'}(g) = P_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g)$.
   En faisant le produit, on a donc : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure naturelle de plan vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application suivante :
$$\varphi(z) = iz - \mathbf{Re}(z)$$

1. **Montrer que φ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.**
   Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\varphi(\lambda z + z') = i(\lambda z + z') - \mathrm{Re}(\lambda z + z') = \lambda(iz - \mathrm{Re}(z)) + (iz' - \mathrm{Re}(z')) = \lambda\varphi(z) + \varphi(z')$$
   Ainsi, φ est linéaire, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, c'est donc un endomorphisme.
2. **Donner la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B} = (1, i)$.**
   On a $\varphi(1) = i - \mathrm{Re}(1) = i - 1$, et $\varphi(i) = i^2 - \mathrm{Re}(i) = -1$.
   La matrice de φ dans la base $(1, i)$ est donc
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. **Quelle est la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F} = (1 + i, 1 - i)$?**
   La matrice Q exprime les nouveaux vecteurs dans l'ancienne base, c'est donc :
   $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
4. **Donner une expression de la matrice B de φ dans la base $\mathcal{F}$ en fonction de A et de Q. Calculer B.**
   On a
   $$B = Q^{-1}AQ$$
   Il faut d'abord calculer Q^{-1}. On a $\det(Q) = -2$ et $\mathrm{com}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc
   $$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
   D'où
   $$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
   On peut d'ailleurs bien vérifier que $\varphi(1+i) = i-2 = -\frac{1}{2}(1+i) - \frac{3}{2}(1-i)$ et $\varphi(1-i) = i = \frac{1}{2}(1+i) - \frac{1}{2}(1-i)$.

Exercice 3

On considère la matrice A à coefficients entiers
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$$

1. **Montrer que la matrice est inversible. Calculer son inverse.**
   Calculons le déterminant de A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -19 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & -20 \\ 4 & -19 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -20 \\ -2 & -19 \end{vmatrix} = -1$$

   Puisque $\det(A) \neq 0$, la matrice A est bien inversible.
   Calculons A^{-1} avec la formule de la comatrice.

$$\mathrm{com(A)} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 21 & -100 \\ 4 & -19 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -10 & -100 \\ -2 & -19 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -10 & 21 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -20 \\ 4 & -19 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -20 \\ -2 & -19 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & -20 \\ 21 & -100 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -20 \\ -10 & -100 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -10 & 21 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 \\ -4 & -21 & -4 \\ 20 & 100 & 19 \end{pmatrix} = -\,{}^tA$$

   Donc $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A) = A$.
2. **Soit I_3 la matrice identité 3×3. Déduire de la question précédente que $A^n = I_3$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.**
   Puisque A est inversible et d'inverse A, on a $A^2 = I_3$. Ainsi, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} = (A^2)^k = I_3$ et $A^{2k+1} = A \times (A^2)^k = A$.
3. **Utiliser la première question pour résoudre le système**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + 4y - 20z &=& 1 \\ -10x + 21y - 100z &=& -1 \\ -2x + 4y - 19z &=& 1 \end{array} \right.$$

   Le système équivaut matriciellement à l'identité $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Or $AX = B$ est équivalent à $X = A^{-1}B = AB$ puisque A est inversible d'inverse A.
   La seule solution X au système est donc

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -131 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

1. **Montrer que Im(f) $\subset$ Ker(f)**
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, autrement-dit, $\exists x \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = f(x)$.
   Montrons que y appartient à $\mathrm{Ker}(f)$. En effet, $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$.
   Donc on a bien l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. **En déduire que le rang de f est 1.**
   (On pourra raisonner par l'absurde en considérant les autres rangs possibles de f).
   Suivons l'indication. Le rang de f est un entier compris entre 0 et 3.
   f est un endomorphisme non nul, donc le rang de f est différent de 0.
   f n'est pas de rang 3 car cela voudrait dire que f est bijectif, donc f^2 le serait aussi, or $f^2 = 0$.
   Si f était de rang 2, la dimension du noyau serait également supérieure à 2 vu l'inclusion précédente. Or $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f) = 3$ d'après le théorème du rang, on a donc une contradiction.
   Le seul rang possible pour f est donc 1.

3. **Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, il existe un vecteur non nul x_0 dans $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}(f)$.
Son image $y_0 = f(x_0)$ est donc non nulle.
De plus $f(y_0) = f^2(x_0) = 0$, donc y_0 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.
On complète la famille (x_0, y_0) par un vecteur x_1 de $\mathrm{Ker}(f)$ de telle sorte que (y_0, x_1, x_0) soit une base de $\mathbb{R}^3$). Alors, la matrice de f dans cette base est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $C_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

On développe par rapport à la dernière colonne.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} - a^3 = a \left(a \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} + a^2 \right) - a^3 = a^2(a^3 - 4a) = a^5 - 4a^3$$

Exercice 6

Soit A une matrice symétrique et inversible. Montrer que son inverse est symétrique.
On sait que $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.
Soit A une matrice symétrique, donc telle que ${}^tA = A$, et telle que A soit inversible.
Alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}$.
Donc l'inverse d'une matrice symétrique-inversible est encore symétrique.

Exercice 7

On considère une matrice inversible E de taille $n \times n$ à coefficient dans un corps $\mathbb{K}$. On notera P_E le polynôme

$$P_E(X) = \det(E - XI_n)$$

où X est une indéterminée et I_n la matrice identité $n \times n$. Montrer la formule suivante :

$$P_{E^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n X^n}{\det(E)} P_E\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$\begin{aligned} P_{E^{-1}}(X) &= \det(E^{-1} - XI_n) = \det(E^{-1}(I_n - XE)) = \det(E^{-1}) \det(-X(E - \frac{1}{X}I_n)) \\ &= \frac{1}{\det}(E)(-X)^n \det(E - \frac{1}{X}I_n) = \frac{(-1)^n X^n}{\det(E)} P_E\left(\frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dont on désigne par $\mathcal{B}$ la base (a_1, a_2, a_3). On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. **Montrer que $f^2 = 5f - 4Id_E$ où Id_E désigne l'application identité de E.**
   Notons A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On sait que f^2 est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 15 \\ 15 & 16 & 15 \\ -15 & -15 & -14 \end{pmatrix} = 5A - 4I_3$$

   où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Ainsi, on a bien $f^2 = 5f - 4Id_E$.

2. **En déduire que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E.**

$$f^2 = 5f - 4Id_E \Longleftrightarrow f^2 - 5f = -4Id_E \Longleftrightarrow f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id_E\right) = Id_E$$

   Ainsi, f est bien bijective et son inverse est

$$f^{-1} = -\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id_E$$

3. (a) **Montrer que $\mathbf{Ker}(f - Id_E) \cap \mathbf{Ker}(f - 4Id_E) = \{0_E\}$.**
   On a toujours l'inclusion $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f - Id_E) \cap \text{Ker}(f - 4Id_E)$ puisque 0_E est dans tout sous-espace vectoriel.
   Soit $x \in \text{Ker}(f - Id_E) \cap \text{Ker}(f - 4Id_E)$.
   Puisque $x \in \text{Ker}(f - Id_E)$, on a $f(x) = x$.
   Puisque $x \in \text{Ker}(f - 4Id_E)$, on a $f(x) = 4x$.
   On a donc $4x = x$, soit $x = 0$. La deuxième inclusion est donc montrée.

   (b) **Montrer que $\mathbf{Ker}(f - Id_E)$ et $\mathbf{Ker}(f - 4Id_E)$ sont supplémentaires.**
   On peut le faire par condition nécessaire et suffisante.
   Soit $x \in E$. Supposons que $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \text{Ker}(f - Id_E)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f - 4Id_E)$.
   On a alors $(f - Id_E)(x) = (f - Id_E)(x_2) = f(x_2) - x_2 = 3x_2$. Donc $x_2 = \frac{1}{3}(f(x) - x)$.
   Alors $x_1 = x - x_2 = \frac{1}{3}(4x - f(x))$.

   Revenons à un $x \in E$ quelconque. On peut toujours écrire :

$$x = \frac{1}{3}(4x - f(x)) + \frac{1}{3}(f(x) - x)$$

   On vérifie que $(f - Id_E)\left(\frac{1}{3}(4x - f(x))\right) = \frac{1}{3}(5f - 4Id_E - f^2)(x) = 0$
   et $(f - 4Id_E)\left(\frac{1}{3}(f(x) - x)\right) = \frac{1}{3}(f^2 - 5f + 4Id_E)(x) = 0$.
   On a donc montré que $E \subset \text{Ker}(f - Id_E) + \text{Ker}(f - 4Id_E)$. L'autre inclusion est toujours vraie, et l'intersection nulle nous confirme que

$$E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f - 4Id_E)$$

4. **On pose $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 + a_2 - a_3$. Montrer que la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de E, base que l'on notera $\mathcal{B}'$.**
   Il suffit de montrer que la famille est libre, puisqu'on a trois vecteurs en dimension 3. Regardons le déterminant de la famille (b_1, b_2, b_3).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 1 \neq 0$$

   La famille est donc bien libre, c'est bien une base de E.

5. **Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.**
Calculons les images de b_1, b_2 et b_3 par l'application f.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que la mtrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. **Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.**
La matrice P contient les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a déjà montré que $\det(P) = 1$. Il suffit de calculer la comatrice pour avoir l'inverse.

$$\operatorname{com}(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = {}^t\operatorname{com}(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. **Calculer A^n pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.**
On a $A = PA'P^{-1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PA'P^{-1})^n = PA'^n P^{-1}$.
On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n & 4^n - 1 \\ 1 - 4^n & 1 - 4^n & 2 - 4^n \end{pmatrix}$$

On veut calculer $A^{-n} = (A^{-1})^n$.
$A = PA'P^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = PA'^{-1}P^{-1}$.
On a donc

$$A^-n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1/4)^n & (1/4)^n - 1 & (1/4)^n - 1 \\ (1/4)^n - 1 & (1/4)^n & (1/4)^n - 1 \\ 1 - (1/4)^n & 1 - (1/4)^n & 2 - (1/4)^n \end{pmatrix}$$