

Fiche Soutien 1

Polynômes et Fractions Rationnelles

Questions de cours

1. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Ecrire la division euclidienne de A par B .
2. Que veut dire l'expression " a est une racine d'ordre 3 de P " ?
3. Donner l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
4. Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ est-il irréductible ?

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme :

$$P = X^2 - 3X + (3 + i)$$

Exercice 2

Dans les cas suivants, effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A(X) = X^3 + 4X^2 + 6X + 4$ et $B(X) = X^2 + 1$
2. $A(X) = X^5 + X^4 + 5X^3 + 6X^2 + 7X + 2$ et $B(X) = X^2 + X + 1$

Exercice 3

Déterminer le PGCD des polynômes suivants :

$$A(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \quad \text{et} \quad B(X) = X^4 + 2X^3 + X + 2$$

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$$

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^3 - 8z^2 + 23z - 28 = 0$$

en sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 6

Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ et de $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{4}{X^2 - 4} \quad , \quad F_2(X) = \frac{3X^2 + 2X + 1}{X(X^2 + X + 1)}$$
$$F_3(X) = \frac{X^2 + 1}{(X - 1)^3(X + 2)} \quad , \quad F_4(X) = \frac{X^2}{(X^2 + 4)(X^2 + 1)^2}$$