Fiche Soutien 2
Espaces vectoriels

Questions de cours

1. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.. Que veut dire l'expression "$(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre de E" ?
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit $A = (u_1, u_2, u_3)$ une famille de E.
   Peut-on avoir A qui engendre E ? A libre dans E ? A base dans E ?
   Mêmes questions pour $B = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on désigne par

$$u_1 = (2, 1, 1) \quad , \quad u_2 = (3, -1, 4) \quad , \quad v_1 = (1, 1, 0) \quad , \quad v_2 = (1, 0, 1)$$

Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(v_1, v_2)$.

Exercice 2

On définit l'ensemble $F \subset \mathbb{R}^3$ par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 4z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

On considère les vecteurs $u = (2, -2, 2)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Donner une base de $F = Vect(u, v, w)$.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer une base de G.
4. Comparer F et G.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2, 1), \quad v_3 = (1, 2, 1, 0), \quad v_4 = (2, -1, 3, 2), \quad v_5 = (6, 2, 8, 2)$$

On note $E = Vect(v_1, v_2, v_4)$ et $F = Vect(v_1, v_3, v_5)$

1. Donner une base de E, F, $E + F$, $E \cap F$.
2. Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On pose $F = Vect(X(X-1)\, , X)$ et $G = Vect(X^2 + 4)$.
Montrer que $E = F \oplus G$.