Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L1 MATH II Algèbre

Fiche Soutien 3
Applications linéaires

Questions de cours

1. Si f est une application linéaire de E dans F, comment voit-on si f est injective ?
2. Enoncer le théorème du rang.
3. Soit f et g deux endomorphismes de E. Montrer que $g \circ f = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
4. Soit E un espace vectoriel. Définir ce qu'est un projecteur de E.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - Id) \;\oplus\; \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

Exercice 2

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\quad g \circ f \circ g = g \quad$ et $\quad f \circ g \circ f = f$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que sont équivalents :

(i). $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
(ii). $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$
(iii). $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$
(iv). $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
(v). $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

Exercice 4

Soit $n \geq 1$ et $\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ l'application definie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est bien definie et que Δ est une application lineaire.
2. Determiner le noyau de Δ.
3. Montrer que Δ est surjective.

Exercice 5

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1$$

où $\mathcal{B} = (e1, e2, e3)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $f^3 = Id_{\mathbb{K}^3}$
3. Démontrer que $F = \{u \in \mathbb{K}^3 \;/\; f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ et déterminer sa dimension.

Exercice 6

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$, alors $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ engendrent $\mathrm{Im} f$.
2. Montrer que si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ forment un système libre, alors $v_1, v_2, \ldots, v_p$ aussi.
3. Montrer que si f est injective et si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est un système libre, alors $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ est aussi libre.

Exercice 7

Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
3. En déduire que u est surjective.