Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L1 MATH II Algèbre

Fiche Soutien 4
Matrices

Questions de cours

1. Définir ce qu'est une matrice inversible.
2. Soient A et B deux matrices respectivement de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ Que vaut le coefficient (i,j) de la matrice AB ?
3. Définir ce qu'est le noyau d'une matrice.
4. Donner la formule du binôme de Newton.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f(x,y) = (x-2y, 3y)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}_2$.
2. On pose $u = e_1$ et $v = e_1 + e_2$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 2

Soient : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA si cela est possible.
2. Ecrire ${}^tA$ et ${}^tB$.
3. Calculer ${}^tB\,{}^tA$. Comme peut-on vérifier le calcul ?

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,3,4)$ et $u_3 = (4,9,16)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 4A + 3I$.

En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice B telle que $A = 2I + B$.
2. Calculer B^2 et B^3.
3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour montrer que A est inversible. Préciser son inverse.

Exercice 7

Soit f l'endomorphisme, dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'image du vecteur $(2, 1, -1)$ par f.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - 2I)$, $\mathrm{Ker}(A - 3I)$ et $\mathrm{Ker}(A - 6I)$.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit simple.

Exercice 8

Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y - z & = & 1 \\ 4x - 3y + 4z & = & 0 \\ 3x - 3y + 4z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 9

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $A' = P^{-1}AP$
   (c) Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{array} \right.$$

   Calculer u_n et v_n pour tout $n \geq 1$.