Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L1 MATH II Algèbre

Fiche Soutien 5
Déterminants et Systèmes Linéaires

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $a \neq b$. Calculer le déterminant : $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$.

Exercice 3

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

On se donne les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1,1,1) \quad , v = (2,3,4) \quad , \quad w = (4,9,16)$$

Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Soit le système (S) suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccc} x + y - z & = & 1 \\ 2x + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 3 \end{array} \right.$$

Justifier que ce système est de Cramer, et déterminer (x, y, z) à l'aide des formules de Cramer.

Exercice 6

On se donne la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, sous forme factorisée, le polynôme χ_A défini par $\chi_A(X) = \det(A - XI_3)$.
   *(On dit que χ_A est le **polynôme caractéristique** de A).*
2. Déterminer les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de ce polynôme.
   *(On appelle ces valeurs les **valeurs propres** de la matrice A).*
3. Pour chaque λ_i précédent, déterminer une base de $\ker(A - \lambda I_3)$.
   *(On dit que ces sev sont les **sous-espaces propres** associés aux valeurs propres précédentes).*
4. En déduire une écriture plus simple de la matrice A dans une certaine base à expliciter.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que les sous-espaces propres associés à A.
3. En déduire que A est diagonalisable dans une certaine base que l'on explicitera.
4. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.