Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L1 MATH II Algèbre

Fiche Soutien 6
Révisions Examen

Exercice 1 (Examen Juin 2004)

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que le rang de f est 1.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}f$. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker}f$.
2. Quel est le rang de f ? Donner une base de $\mathrm{Im}f$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$.
4. On considère les vecteurs $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = -6e_2 + 3e_3$ et $v_3 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $w = -4e_1 - 6e_2 + 7e_3$. Calculer $f(w)$ en fonction de w.
6. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2, v_3. Donner la matrice $A' = mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
7. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
8. Retrouver A' en utilisant P et P^{-1}.

Exercice 3 (Examen Janvier 2005)

Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Examen Juillet 2004)

Soit $u \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1+u & u & \cdots & u \\ u & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u \\ u & \cdots & u & 1+u \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det(A) = 1 + nu$.

Exercice 5 (Examen Juillet 2004)

Soit $u \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1+u & u & \cdots & u \\ u & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u \\ u & \cdots & u & 1+u \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det(A) = 1 + nu$.

Exercice 6 (Examen Juin 2003 - Paris XII)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(2+i)z+3+i=0$.
2. Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} z & 2z-z^2 & z \\ 0 & 2-z & 1 \\ z & 2z-z^2+i-3 & i \end{vmatrix}$.
3. On définit les vecteurs de $\mathbb{C}^3$:
$$X_1=(z,2z-z^2,z), \qquad X_2=(0,2-z,1), \qquad X_3=(z,2z-z^2+i-3,i)$$
où z est un paramètre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que (X_1,X_2,X_3) soit une famille libre.
4. On note F le sous-espace vectoriel engendré par la famille (X_1,X_2,X_3). Dans le cas $z=1-i$, déterminer la dimension de F et donner une base de F.

Exercice 7 (Examen Juin 2004 - Paris XII)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4+1=0$.
2. En déduire la décomposition en facteurs premiers du polynôme X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Quelle est la décomposition en facteurs premiers du polynôme X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$?
4. Faire la division euclidienne de X^4+1 par X^2+1.
5. Existe-t-il un polynôme P unitaire et de degré 2, tel que
$$P(0)=1 \quad , \quad P(1)=1 \quad , \quad P(2)=1$$

Exercice 8 (Examen Juin 2006)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. En déduire que $A^n = I_3$ si n est pair, et que $A^n = A$ si n est impair.
3. Résoudre le système suivant :
$$\left\{ \begin{array}{lcr} -x+4y-20z & = & 1 \\ -10x+21y-100z & = & -1 \\ -2x+4y-19z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 9 (Examen Juin 2004)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :
$$F(X) = \frac{X^3-3X-9}{(X-2)^2(X^2+X+1)}$$