

## Fiche Soutien 7

### Révisions Examen 2ème session

---

#### Exercice 1

Vrai ou Faux ? Il existe une matrice carrée  $A$  d'ordre 2, à éléments réels telle que  $A^2 = -I_2$ , où  $I_2$  désigne la matrice unité réelle carrée d'ordre 2.

#### Exercice 2

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , on désigne par  $g$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(g^2)$  et  $\text{Im}(g^2) \subset \text{Im}(g)$ .
2. On suppose, de plus, que  $E$  est de dimension finie. Montrer que :

$$\text{Im}(g^2) = \text{Im}(g) \iff \text{Ker}(g^2) = \text{Ker}(g)$$

#### Exercice 3

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$  dont on désigne par  $\mathcal{B}$  la base  $(a_1, a_2, a_3)$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $f^2 = 5f - 4Id_E$  où  $Id_E$  désigne l'application identique de  $E$ .
2. En déduire que  $f$  est bijective et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$  et  $Id_E$ .
3. (a) Montrer que  $\text{Ker}(f - Id_E) \cap \text{Ker}(f - 4Id_E) = \{0_E\}$ .  
(b) Montrer que  $\text{Ker}(f - Id_E)$  et  $\text{Ker}(f - 4Id_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .
4. On pose :  $b_1 = a_1 - a_2$ ,  $b_2 = a_2 - a_3$ ,  $b_3 = a_1 + a_2 - a_3$ .  
Montrer que la famille  $(b_1, b_2, b_3)$  est une base de  $E$ , base que l'on notera  $\mathcal{B}'$ .
5. Déterminer la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
6. Ecrire la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Calculer  $P^{-1}$ .
7. Calculer  $A^n$  pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

#### Exercice 4

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^4 + 1 = 0$ .
2. En déduire la décomposition en facteurs premiers du polynôme  $X^4 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
3. Quelle est la décomposition en facteurs premiers du polynôme  $X^4 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$  ?
4. Faire la division euclidienne de  $X^4 + 1$  par  $X^2 + 1$ .
5. Existe-t-il un polynôme  $P$  unitaire et de degré 2, tel que

$$P(0) = 1 \quad , \quad P(1) = 1 \quad , \quad P(2) = 1$$

#### Exercice 5

Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  la fraction :

$$F(X) = \frac{X^3 - 3X - 9}{(X - 2)^2(X^2 + X + 1)}$$