Etudiant 1 :

Cours :

Définir la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique. Enoncer clairement le théorème de Jordan-Dirichlet.

Exercice 1 :

Développer en série entière la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$

Exercice 2 :

Rechercher les solutions développables en série entière solutions de l'éq.diff. $2xy'' + y' - y = 0$.

Etudiant 2 :

Cours :

Développer en série entière les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Artan}(x)$ et préciser les domaines de validité.

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, paire, telle que $\forall t \in [0, \pi], f(t) = t$.
Calculer les coefficients de Fourier de f. Etudier les convergences de la série de Fourier de f.
En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 2 :

Rechercher les solutions développables en série entière solutions de l'éq.diff. $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

Etudiant 3 :

Cours :

Définir l'exponentielle d'un nombre complexe et montrer l'égalité $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto e^{x \operatorname{ch}(a)} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh}(a))$

Exercice 2 :

Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.
Calculer les coefficients de Fourier de f. Etudier les convergences de la série de Fourier de f.
En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Développer en série entière la fonction

$$f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Exercice 2 :

Calculer les sommes des séries suivantes en utilisant des séries entières :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 3 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = |\cos t|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f
3. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$