

Etudiant 1 :

Cours :

Donner la définition de la limite supérieure d'une suite réelle.
Quel est le lien avec les valeurs d'adhérence de la suite ?

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} \right)$

Exercice 2 :

On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}$.

Montrer que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ et donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Etudiant 2 :

Cours :

Donner la définition de la limite d'une suite complexe. Quel est le lien avec la limite de la suite du module ?

Exercice 1 :

Déterminer $\sup(u_n)$, $\inf(u_n)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty}(u_n)$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty}(u_n)$ pour la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$$

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \exp u_n$.

1. Montrer que si $\exists p \geq 2$ tel que $u_p \leq 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$
3. Montrer que si (u_n) ne converge pas, alors elle diverge vers $+\infty$.

Etudiant 3 :

Cours :

Donner la définition d'une suite de Cauchy. Quelles propriétés de convergence a une telle suite ?

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sh}(\operatorname{ch} x) - \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x))$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ telle que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. On suppose de plus que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ est bornée.

1. Soient $m \geq n$, 2 entiers, et r le reste de la division euclidienne de m par n . Montrer que $\frac{u_m}{m} \leq \frac{u_r}{m} + \frac{u_n}{n}$.
2. En déduire que $\forall n \geq 1$, $\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{u_m}{m} = \frac{u_n}{n}$.
3. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ est convergente.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Déterminer les limites inférieures et limite supérieure des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad , \quad v_n = (-1)^n \quad , \quad w_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle bornée et $(v_n)_n$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1, v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$$

Montrer que (v_n) est également bornée et établir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Que peut-on en déduire pour les convergences de (u_n) et (v_n) ?

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(1-x)} \right)$$