Etudiant 1 :

Cours :

Donner la définition d'une suite de Cauchy. Quelles propriétés de convergence a une telle suite ?

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}\right)$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle bornée et $(v_n)_n$ la suite définie par $\forall n\geq 1,\ v_n=\dfrac{u_1+\ldots+u_n}{n}$.

Montrer que (v_n) est bornée et établir que $\liminf\limits_{n\infty} u_n \leq \liminf\limits_{n\infty} v_n \leq \limsup\limits_{n\infty} v_n \leq \limsup\limits_{n\infty} u_n$.

Que peut-on en déduire pour les convergences de (u_n) et (v_n) ?

Etudiant 2 :

Cours :

Donner la définition de la limite d'une suite complexe. Quel est le lien avec la limite de la suite du module ?

Exercice 1 :

Déterminer les limites inférieures et limite supérieure des suites suivantes :

$$u_n=\frac{1}{n+1} \quad ,v_n=(-1)^n \quad , \quad w_n=\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\geq 0,\ u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\exp u_n$.

1. Montrer que si $\exists p\geq 2$ tel que $u_p\leq 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
3. Montrer que si (u_n) ne converge pas, alors elle diverge vers $+\infty$.

Etudiant 3 :

Cours :

Donner la définition de la limite supérieure d'une suite réelle.
Quel est le lien avec les valeurs d'adhérence de la suite ?

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\mathrm{sh}(\mathrm{ch}\,x)-\mathrm{ch}(\mathrm{sh}\,x)\big)$

Exercice 2 :

On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0>0$ et $\forall n\geq 0,\ u_{n+1}=\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}$.

Montrer que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ et donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Déterminer $\sup(u_n)$, $\inf(u_n)$, $\limsup_{n\infty}(u_n)$ et $\liminf_{n\infty}(u_n)$ pour la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ \frac{5}{4}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \frac{6}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\ ,\ \dots$$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ telle que $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \ u_{m+n} \leq u_m + u_n$. On suppose de plus que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ est bornée.

1. Soient $m \geq n$, 2 entiers, et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que $\frac{u_m}{m} \leq \frac{u_r}{m} + \frac{u_n}{n}$.
2. En déduire que $\forall n \geq 1,\ \ \limsup_{m\infty} \frac{u_m}{m} = \frac{u_n}{n}$.
3. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ est convergente.

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}\right) \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\mathrm{Arctan}(1+x)-\mathrm{Arctan}(1-x)}\right)$$