Etudiant 1 :

Cours :

Donner la définition de la convergence absolue d'une série réelle ou complexe.
Rappeler et prouver le lien avec la convergence ordinaire d'une série.

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$.

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \exp u_n$.

1. Montrer que si $\exists p \geq 2$ tel que $u_p \leq 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
3. Montrer que si (u_n) ne converge pas, alors elle diverge vers $+\infty$.

Etudiant 2 :

Cours :

Définition de la limite supérieure et limite inférieure d'une suite.
Déterminer $\sup(u_n)$, $\inf(u_n)$, $\limsup_{n\infty}(u_n)$ et $\liminf_{n\infty}(u_n)$ pour la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$\frac{3}{2}\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{4}{3}\,,\ -\frac{1}{3}\,,\ \frac{5}{4}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{6}{5}\,,\ -\frac{1}{5}\,,\ \ldots$$

Exercice 1 :

En étudiant un équivalent de $\sin(u_n)$, déterminer la nature de la série $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} n^2\right)$

$$\left(\text{Rappel : } \forall x > 0,\ \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Artan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Etudiant 3 :

Cours :

Rappeler et prouver le théorème de comparaison série/intégrale.

Exercice 1 :

Etudier les convergences des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$.

En cas de convergence, déterminer la somme de la série.

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs et $(v_n)_n$ la suite définie par $\forall n \geq 0$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n^3-2n^2-n+2}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2 :

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(2-\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Déterminer $\limsup_{n\to+\infty}(u_n)$ et $\liminf_{n\to+\infty}(u_n)$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 3 :

On définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n-(-1)^{n+1}}$.

Faire un développement asymptotique à l'ordre 2 de u_n quand $n \to +\infty$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.