Etudiant 1 :

Cours :

Rappeler et prouver le théorème de comparaison série/intégrale.

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$.

Exercice 2 :

1. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ par $\forall n \geq 2,\ u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_n u_n$?

2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $u_n = v_n - v_{n-1}$ où, pour $n \geq 1$, $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

3. En déduire une expression des sommes partielles de $\sum u_n$, puis la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Etudiant 2 :

Cours :

Donner la définition de la convergence absolue d'une série réelle ou complexe.
Rappeler et prouver le lien avec la convergence ordinaire d'une série.

Exercice 1 :

En étudiant un équivalent de $\sin(u_n)$, déterminer la nature de la série $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} n^2\right)$

$$\left(\text{Rappel : } \forall x > 0,\ \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Artan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 2 :

On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

Montrer que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ et donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Etudiant 3 :

Cours :

Donner la définition d'une série alternée, ainsi que le critère de convergence d'une telle série.

Exercice 1 :

Etudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(-2)^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ et leur somme (si possible).

Exercice 2 :

On définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n - (-1)^{n+1}}$.

Faire un D.A. à l'ordre 2 de u_n quand $n \to +\infty$. et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k^3-3k^2-2k}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2 :

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(2-\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Déterminer $\limsup\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty}(u_n)$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \geq 0,\ v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge et que $(u_n)_n$ est majorée, alors $\sum v_n$ diverge.
3. Trouver un exemple où $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.