

Etudiant 1 :

Cours :

Donner la définition d'une série alternée, ainsi que le critère de convergence d'une telle série. Que peut-on dire du reste d'une série alternée?

Exercice 1 :

Avoir justifié de leur existence, calculer les sommes : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

(On admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$)

Exercice 2 :

Pour $n \geq 2$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \sin(k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k}$.

1. Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge

Etudiant 2 :

Cours :

Énoncer et prouver le théorème de comparaison série/intégrale.

Exercice 1 :

Avoir justifié de leur existence, calculer les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(-2)^n}$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On pose $\forall n \geq 1, v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Même question avec $v_n = \frac{u_n}{u_1 + u_2 + \dots + u_n}$.

Etudiant 3 :

Cours :

Rappeler les règles de Cauchy et de D'Alembert pour la convergence des séries.

Quel lien y a-t-il entre ces deux règles?

Exercice 1 :

Déterminer la convergence des séries suivantes et leur somme si possible : $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{(-3)^n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$

Exercice 2 :

Soit (a_n) une suite réelle positive. Soit (u_n) la suite définie par la récurrence suivante : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$, avec $u_0 > 0$.

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Etudiant 4 :

Cours :

Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
Quel lien y a-t-il entre ces deux modes de convergence ?

Exercice 1 :

Déterminer la conv. des séries suivantes et leur somme si possible : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^2 - 1}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$

Exercice 2 :

On pose pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 2 :

On définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n - (-1)^{n+1}}$.

Faire un développement asymptotique à l'ordre 2 de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \exp u_n$.

1. Montrer que si $\exists p \geq 2$ tel que $u_p \leq 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$
3. Montrer que si (u_n) ne converge pas, alors elle diverge vers $+\infty$.