

Etudiant 1 :

Cours :

Donner la définition d'une série alternée, ainsi que le critère de convergence d'une telle série. Que peut-on dire du reste d'une série alternée?

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonction, définie par $f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ pour $x > 0$ et $f_n(0) = 0$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On pose $\forall n \geq 1, v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Même question avec $v_n = \frac{u_n}{u_1 + u_2 + \dots + u_n}$. (*Possibilité : regarder $\ln(1 - v_n)$.*)

Etudiant 2 :

Cours :

Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions continues qui CVU vers f sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit (a_n) une suite réelle positive. Soit (u_n) la suite définie par la récurrence suivante : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$, avec $u_0 > 0$.

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Etudiant 3 :

Cours :

Enoncer les différents types de convergence pour une suite de fonction. Rappeler les liens entre ces convergences.

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonctions définie par $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$, pour $x \geq 0$.

Exercice 2 :

Pour $n \geq 2$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \sin(k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k}$.

1. Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 2 :

Après avoir justifié de leur existence, calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\left(\text{Rappel : on a } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6} \right)$$

Exercice 3 :

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f_n(x) = n \sin(x) \cos^n(x)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n)
2. Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
3. Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4 :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n)
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
3. Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.