

Etudiant 1 :

Cours :

Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions continues qui CVU vers f sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonction, définie par $f_n(x) = xe^{x/n}$ pour $x \geq 0$.

Exercice 2 :

Après en avoir montré la convergence, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(2k-1)}$$

(on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$).

Etudiant 2 :

Cours :

Définir clairement les différents types de convergence pour une série de fonction. Rappeler les liens entre ces convergences.

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonction, définie par $f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}$ pour $x \geq 0$.

Exercice 2 :

Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Etudiant 3 :

Cours :

Enoncer la définition et les propriétés du rayon de convergence d'une série entière.

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonction, définie par $f_n(x) = nxe^{-nx} \sin x$ pour $x \geq 0$.

Exercice 2 :

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On pose pour tout $n \geq 0$, $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f_n(x) = n \sin(x) \cos^n(x)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n)
2. Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
3. Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2 :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n)
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
3. Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 3 :

Pour $n \geq 2$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \sin(k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k}$.

1. Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge