Etudiant 1 :

Cours :

Théorème d'Abel pour les séries entières. Continuité d'une série entière sur son disque de convergence.

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la série de fonction $\sum f_n$, où

$$\forall >\geq 0, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2 + x}$$

Exercice 2 :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la suite définie par $g_n = \dfrac{f_n}{1+f_n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Etudiant 2 :

Cours :

Enoncer la définition et les propriétés du rayon de convergence d'une série entière.

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonction définie par

$$\forall x \geq 0, \quad f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}$$

Exercice 2 :

Etudier les convergences de la série de fonction $\sum f_n$, où

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$$

Etudiant 3 :

Cours :

Définir clairement les différents types de convergence pour une série de fonction. Rappeler les liens entre ces convergences.

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la suite de fonction définie par

$$\forall x \geq 0, \quad f_n(x) = nxe^{-nx}\sin(x)$$

Exercice 2 :

Etudier les convergences de la série de fonction $\sum f_n$, où

$$\forall x \geq 0, \quad f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}$$

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n)
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
3. Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 2 :

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f_n(x) = n\,\sin(x)\cos^n(x)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n)
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformement ?
3. Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3 :

Pour $n \geq 2$, on pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k}$.

1. Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge