Etudiant 1 :

Cours :

Définir l'exponentielle d'un nombre complexe $\exp(z)$ et montrer que : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2)$

Exercice 1 :

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

Exercice 2 :

Soit f_n la suite de fonction définie par $\forall x > 0,\ f_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$.
Déterminer les convergences de la série de fonction $\sum f_n$.
Déterminer un équivalence de la somme f en 0^+ et en $+\infty$.

Etudiant 2 :

Cours :

Recherche d'une série entière solution de l'équation différenteille $f' = f$.

Exercice 1 :

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

Exercice 2 :

Etudier les convergences de la série de fonction $\sum f_n$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$$

Etudiant 3 :

Cours :

Théorème d'Abel pour une série entière. Continuité d'une série entière sur son disque de convergence.

Exercice 1 :

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$

Exercice 2 :

On pose $\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.
Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.
Montrer que la fonction somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = +\infty$. Qu'en déduire ?
Etudier la limite de S en $+\infty$

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

On pose $f_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th}(n)$

1. Etudier la convergence de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$
2. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que S est croissante.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x+1) = S(x) + 1 - \text{th}(x+1)$

Exercice 2 :

1. Justifier l'existence de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est 1-périodique.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$

Exercice 3 :

On pose pour $t > 0$, $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nt}$.

1. Justifier que S est definie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier la limite de S en $+\infty$.
3. Etablir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.