

Etudiant 1 :

Cours :

Recherche d'une série entière solution de l'équation différentielle $f' = f$.

Exercice 1 :

Développer en série entière la fonction $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$

Exercice 2 :

Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $\forall x \geq 0, f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

Etudiant 2 :

Cours :

Enoncer et prouver les développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\text{Arctan}(x)$.

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $\forall x \geq 0, f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x}$.

Exercice 2 :

Calculer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière : $\sum_{n \geq 0} n^3 x^n$.

Etudiant 3 :

Cours :

Déterminer un développement en série entière de $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en précisant son domaine de validité

Exercice 1 :

Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $\forall x \geq 0, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Exercice 2 :

Calculer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière : $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n + 1} x^n$.

Etudiant 4 :

Cours :

Définir l'exponentielle d'un nombre complexe $\exp(z)$ et montrer que : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$

Exercice 1 :

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ en précisant le rayon de convergence R .

Exercice 2 :

Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

On pose $f_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th}(n)$

1. Etudier la convergence de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$
2. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que S est croissante.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, S(x+1) = S(x) + 1 - \text{th}(x+1)$

Exercice 2 :

1. Justifier l'existence de $f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est 1-périodique.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$

Exercice 3 :

On pose pour $t > 0, S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier la limite de S en $+\infty$.
3. Etablir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 :

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé.

Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x} \tan \theta\right)$$