

Théorème du polyèdre fondamental de Poincaré

Yoann Gelineau

Travail encadré de recherche - Année 2005-2006

Table des matières

0.1	Introduction	4
1	Notations	5
1.1	Espaces hyperboliques	5
1.2	Groupes d'isométries	6
1.3	Groupes discontinus, groupes discrets	6
1.3.1	Action discontinue	6
1.3.2	Action librement discontinue	7
1.4	Polyèdres	7
1.4.1	Définitions	7
1.4.2	Polyèdres fondamentaux	8
2	Théorème de Poincaré	11
2.1	Hypothèses	11
2.2	Enoncé du théorème de Poincaré	13
2.3	Lemme et démonstration	14
3	Exemples et illustrations en dimension 2	17
3.1	Polygones réguliers	17
3.2	Théorème de Poincaré simplifié	18
3.3	Pavages de \mathbb{E}^2 par des polygones réguliers	19
3.4	Pavages hyperboliques	20
3.4.1	Exemples de pavages du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2	21
3.4.2	Exemples de pavages du modèle sphérique de Poincaré \mathbb{B}^2	22
3.4.3	Exemples de pavages du modèle de Klein \mathbb{K}^2	23

0.1 Introduction

Le sujet de recherche sur lequel repose mon étude est le Théorème du Polyèdre Fondamental de Poincaré, dont une description et une démonstration se trouvent dans le livre de Bernard Maskit, *Kleinian Groups*. Ce théorème permet de savoir dans les géométries hyperboliques si un polyèdre donné peut être "fondamental", c'est à dire être à la base d'un pavage de l'espace tout entier. Cependant, les notions qu'il nécessite m'étaient à la base inconnues et j'ai donc dû préalablement faire des recherches afin de mieux comprendre les notations et les définitions utilisées.

Mon travail s'est ainsi principalement déroulé en trois parties : premièrement un travail de recherche, durant lequel j'ai dû à la fois rattraper certains cours optionnels de Master 1, afin d'assimiler les bases de ce qu'est une "topologie de groupe", faire des recherches complémentaires sur la géométrie hyperbolique, et lire le livre de B. Maskit (en anglais, ce qui personnellement m'était tout à fait nouveau). Ensuite, je me suis intéressé principalement au théorème lui-même, à son énoncé, sa compréhension et sa démonstration. Dernièrement, j'ai dû apprendre à me servir du langage LaTeX (langage le plus courant dans la recherche mathématique) et de toutes ses fonctionnalités afin de rédiger ce mémoire.

J'ai décidé ici de présenter mon compte-rendu en trois étapes : tout d'abord les notations et les définitions utilisées (espace hyperbolique, groupe discret, polyèdre, polyèdre fondamental..), puis l'étude du Théorème de Poincaré basée sur le livre de Maskit dont j'ai essayé de traduire les idées principales, et enfin quelques exemples de pavages de l'espace hyperbolique par des polyèdres.

Je tiens également à remercier Mr Tomanov de m'avoir trouvé un sujet intéressant qui était en lien direct avec son propre cours de Géométrie Différentielle, et qui a pu m'initier à ce que peut être un travail de recherche dans les mathématiques.

Chapitre 1

Notations

1.1 Espaces hyperboliques

D'après [3] et [13]

Soit \mathbb{E}^n l'espace euclidien de dimension n . Tout élément de \mathbb{E}^n sera noté (x_1, x_2, \dots, x_n) ou bien de la forme (x, t) avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, t représentant la n -ième coordonnée (on parle d'altitude). \mathbb{E}^n est muni de la norme euclidienne $|\cdot|$ définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n, |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

On définit dans \mathbb{E}^n plusieurs espaces :

$\mathbb{H}^n = \{(x, t) \in \mathbb{E}^n / t > 0\}$ le demi-plan supérieur

$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{E}^n / |x| < 1\}$ la boule unité ouverte

$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n / |x| = 1\}$ la sphère unité

On définit une métrique sur \mathbb{H}^n : la *métrique de Poincaré*

$$ds^2 = \frac{(dx^2 + dt^2)}{t^2}$$

\mathbb{H}^n muni de cette métrique est alors un modèle d'espace hyperbolique, appelé *modèle de Poincaré*

On définit une métrique sur \mathbb{B}^n :

$$ds^2 = \frac{4|x|^2}{(1 - |x|^2)^2}$$

\mathbb{B}^n muni de cette métrique est alors encore un modèle d'espace hyperbolique, appelé *modèle sphérique*

1.2 Groupes d'isométries

Chaque espace possède un groupe d'isométries, c'est à dire un groupe composé de transformations de l'espace bijectives et continues qui conservent la métrique.

Par exemple, on peut voir que le groupe d'isométries de l'espace \mathbb{S}^{n-1} est le groupe orthogonal $\mathcal{O}(n)$. L'espace \mathbb{E}^n a pour groupe d'isométries le groupe $\mathcal{A}(n)$, engendré par $\mathcal{O}(n)$ et les translations euclidiennes. On voudrait donc de la même manière définir un groupe d'isométries sur les espaces \mathbb{H}^n et \mathbb{B}^n .

On désigne par $\widehat{\mathbb{E}^n}$ l'**espace complété** de \mathbb{E}^n , c'est à dire $\widehat{\mathbb{E}^n} = \mathbb{E}^n \cup \{\infty\}$. On définit alors un groupe de transformations $\mathcal{GM}(\widehat{\mathbb{E}^n})$, appelé *groupe général de Möbius*, engendré par les éléments suivants :

- i les translations : $(x, t) \mapsto (x + a, t)$, $a \in \mathbb{E}^{n-1}$, $\infty \mapsto \infty$
- ii les rotations : $(x, t) \mapsto (r(x), t)$, $r \in \mathcal{O}(n-1)$, $\infty \mapsto \infty$
- iii les dilatations (homothéties de rapport positif) : $x \mapsto kx$, $k > 0$, $k \neq 1$, $\infty \mapsto \infty$
- iv l'inversion : $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$, $0 \leftrightarrow \infty$

On peut alors vérifier que le groupe d'isométries de \mathbb{H}^n est coposé exactement des éléments de $\mathcal{GM}(\widehat{\mathbb{E}^n})$ qui gardent \mathbb{H}^n invariant. De même, le groupe d'isométries de \mathbb{B}^n est composé exactement des éléments de $\mathcal{GM}(\widehat{\mathbb{E}^n})$ qui gardent \mathbb{B}^n invariant.

Dans la suite, nous parlerons donc des espaces hyperboliques et de leurs groupes d'isométries dans un contexte général : on notera \mathbb{X} l'espace étudié (par exemple \mathbb{E}^n , \mathbb{H}^n , \mathbb{B}^n ou \mathbb{S}^{n-1}), et on notera \mathbb{G} son groupe d'isométries correspondant.

1.3 Groupes discontinus, groupes discrets

D'après [8] et [12]

1.3.1 Action discontinue

Soit \mathbb{X} un espace métrique, et soit G un groupe d'homéomorphismes de \mathbb{X} dans \mathbb{X} . On dit que l'action de G en un point $x \in \mathbb{X}$ est *discontinue* si

$$\exists V \in \mathcal{V}(x) / g(V) \cap V \neq \emptyset \text{ seulement pour un nombre fini de } g \in G$$

où $\mathcal{V}(x)$ désigne un voisinage du point x . L'ensemble des points en lesquels l'action de G est discontinue est noté $\Omega = \Omega(G)$, et appelé *l'ensemble de discontinuité* pour G .

On a le résultat suivant :

$$x \in \Omega(G) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Stab}(x) \text{ est fini} \\ x \text{ a un voisinage } V \text{ tel que } \begin{cases} \forall g \in \text{Stab}(x), g(V) \cap V = V \\ \text{pour tous les autres } g, g(V) \cap V = \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

1.3.2 Action librement discontinue

Soit \mathbb{X} un espace métrique, et soit G un groupe d'homéomorphismes de \mathbb{X} dans \mathbb{X} . On dit que l'action de G sur \mathbb{X} est **librement discontinue** si

$$\forall x \in \mathbb{X}, \exists V \in \mathcal{V}(x) / \forall g \in G \setminus \{\text{Id}\} / g(V) \cap V = \emptyset$$

On dit alors que le voisinage V est un voisinage **convenable** pour x et que le groupe G est un **groupe kleinien**. L'ensemble des points x possédant un voisinage convenable est un ouvert, noté ${}^\circ\Omega(G)$ et appelé **ensemble de libre discontinuité**

On peut remarquer que cette définition est plus restrictive que pour celle d'une action discontinue, car ici le voisinage considéré est disjoint de tous les autres et non de "tous les autres sauf un nombre fini". De plus, l'ensemble ${}^\circ\Omega(G) / G$ est un espace séparé.

On a le résultat suivant :

Théorème. *Soit x un point de \mathbb{X} un espace métrique, et soit H un sous-groupe de \mathbb{G} groupe d'isométries de \mathbb{X} . Alors H agit de manière librement discontinue en x si et seulement si H est un sous-groupe discret de \mathbb{G} .*

Corollaire. *H agit de manière librement discontinue en un point de \mathbb{X} si et seulement si H agit de manière librement discontinue en tout point de \mathbb{X} .*

1.4 Polyèdres

D'après [8]

1.4.1 Définitions

Soit \mathbb{X} un des espaces métriques \mathbb{E}^n , \mathbb{H}^n , \mathbb{B}^n ou \mathbb{S}^{n-1} , et soit \mathbb{G} son groupe d'isométries. Un hyperplan de \mathbb{X} divise l'espace en deux demi-espaces.

Un **polyèdre** (Polyhedron) convexe D de \mathbb{X} est l'intersection d'un ensemble dénombrable de demi-espaces ouverts, tels que n'importe quel sous-espace compact de \mathbb{X} ne rencontre qu'un nombre fini des hyperplans définissant ces demi-espaces.

La fermeture \bar{D} de D possède une décomposition naturelle en "cellules" données par les intersections des hyperplans constructeurs du polyèdre D . Ces cellules sont appelées les **faces** de D . Les faces de codimension 1 sont appelées les **côtés** (side) et les faces de codimension 2 sont appelées les **arêtes** (edge). Chaque arête correspond à l'intersection d'exactly deux côtés.

Un polyèdre en dimension 2 est appelé **polygone**. Dans ce cas particulier, les faces de codimension 2 (ie dimension 0) sont simplement appelées **sommets** (vertice), et les arêtes correspondent finalement aux faces de codimension 1 (ie dimension 1)

1.4.2 Polyèdres fondamentaux

Soit \mathbb{X} un espace métrique, \mathbb{G} son groupe d'isométries. Soit H un sous-groupe discret de \mathbb{G} . Un polyèdre D est dit **fondamental** pour H si :

- (1) $\forall g \in H \setminus \{Id\}, g(D) \cap D = \emptyset$
- (2) $\forall x \in \mathbb{X}, \exists g \in H / g(x) \in \overline{D}$
- (3) Les côtés de D sont appariés par des éléments de H
- (4) Tout compact de \mathbb{X} ne rencontre seulement qu'un nombre fini de H -translatés de D

La condition (3) signifie que pour chaque côté s , il y a un côté s' et un élément $g_s \in G$ tels que $g_s(s) = s'$. Ceci satisfait les conditions $g_{s'} = g_s^{-1}$ et $(s')' = s$. L'élément g_s est appelé une **transformation appariante** (side pairing transformation).

La condition (4) peut être traduite en disant qu'une tessellation de translatés de D dans \mathbb{X} est localement finie. Si la condition (2) est vérifiée, alors pour avoir (4), il suffit de montrer que tout point de \overline{D} a un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de translatés de D .

Si D est un polyèdre fondamental, alors les identifications des côtés induisent une relation d'équivalence sur \overline{D} : on a $x \sim y$ s'il existe une transformation appariante g telle que $g(x) = y$. La condition (1) nous dit alors que deux points de D ne sont pas équivalents. Une conséquence de la condition (4) est que chaque point de \overline{D} est équivalent à au plus un nombre fini de points de \overline{D} .

Cette relation d'équivalence définit également une relation d'équivalence sur les arêtes de D : chaque classe d'équivalence des arêtes peut être ordonnée cycliquement comme suit.

On commence avec une arête e_1 . Elle repose sur la frontière de deux côtés, dont un que l'on note s_1 . Il y a donc alors un côté s'_1 et une transformation appariante g_1 , tels que $g_1(s_1) = s'_1$. Soit alors $e_2 = g_1(e_1)$. Comme e_1 et e_2 reposent dans la frontière d'exactly deux côtés, l'un des deux est s'_1 , et on appelle l'autre s_2 . Encore, il existe un côté s'_2 et une transformation appariante g_2 , tels que $g_2(s_2) = s'_2$. Continuant de cette manière, on crée une suite $(e_m)_m$ d'arêtes, une suite $(g_m)_m$ de transformations appariantes, et une suite $((s_m, s'_m))_m$ de paires de côtés. Puisque chaque point de e_1 est équivalent à au plus un nombre fini d'éléments de \overline{D} , la suite des arêtes est périodique ; ainsi les trois suites sont périodiques. Soit k la plus petite période telle que les trois suites soient périodiques de période k (à part dans le cas où $\mathbb{X} = \mathbb{S}^n$ et D a exactement deux côtés, où alors k est la plus petite période de la suite de couples de côtés).

La suite ordonnée cycliquement d'arêtes (e_1, e_2, \dots, e_k) est appelée un **cycle** des arêtes, k est la **période** de ce cycle. Deux de ces cycles sont **équivalents** s'ils contiennent tous deux le même ensemble d'arêtes. Alors un cycle peut être obtenu à partir d'un autre par permutation cyclique et/ou en inversant l'ordre dans lequel les arêtes apparaissent dans le cycle. Bien entendu, une arête peut apparaître deux fois dans un cycle, mais pas plus de deux fois car chaque arête repose dans la frontière d'exactly deux côtés.

On remarque que $g_k \circ \dots \circ g_1(e_1) = e_1$. $h = g_k \circ \dots \circ g_1$ est appelée la **transformation cyclique** en e_1 .

Soit x un point intérieur de e_1 , et soit L le plan (de dimension 2) passant par x et orthogonal à e_1 . On s'intéresse au tracage des translatés de D dans L . De l'autre côté de e_1 , on voit $g_1^{-1}(D)$ et en continuant autour de e_1 , on voit ensuite $g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_1(g_1^{-1}(D)) = g_1^{-1} \circ g_2^{-1}(D)$, puis $g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1}(D)$, et ainsi de suite.

Cependant, $g_1^{-1} \circ \dots \circ g_k^{-1}(D) = h^{-1}(D)$ peut ne pas être égal à D . Le translaté suivant que l'on voit, continuant autour de e_1 est alors $h^{-1} \circ g_1^{-1}(D)$, et on recommence. Finalement, on revient finalement à D . On définit la période k telle que lorsque l'on revient à D , le translaté correspondant de D , obtenu en suivant les translations autour, soit une puissance de h^{-1} . C'est à dire, il existe un plus petit entier positif q tel que $h^q(D) = D$. Alors $h^q = Id$.

La transformation en cycle en une arête équivalente à e_1 est conjuguée à h ou à h^{-1} . Dans n'importe quel cas, l'ordre q ne dépend que de la classe d'équivalence du cycle.

Les deux côtés de D qui s'intersectent en une arête e se rencontrent avec un angle (bien défini) $\alpha(e)$ mesuré à l'intérieur de D . On a montré que si (e_1, \dots, e_k) est un cycle d'arêtes, et si la transformation cyclique correspondante est d'ordre q , alors :

$$\sum_m \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{q}$$

Théorème. *Les transformations appariantes engendrent H*

Preuve : En effet, si x est un point quelconque de \mathbb{X} , alors on peut tracer un chemin d'un point 0 de D à x , où le chemin ne passe par aucun des translatés d'une face de codimension s de D , $s > 1$. Il existe alors une conjuguée d'une transformation appariante qui envoie chaque translaté de D le long de ce chemin vers le translaté suivant de D . L'élément conjugué est le produit de transformations appariantes. □

L'espace \mathbb{X} est muni d'une métrique riemannienne avec laquelle H agit comme un groupe d'isométries. On peut projeter cette métrique infinitésimale sur $Z = \mathbb{X}/H$.

On s'intéresse tout d'abord à la fonction de distance $d(z, z')$ sur Z , plutôt que la métrique infinitésimale. Cette distance est définie comme l'infimum des longueurs des chemins reliant z et z' . De manière équivalente, on peut utiliser la projection naturelle $p : \mathbb{X} \rightarrow Z$ et définir $d(z, z') = \inf d(x, x')$, où $p(x) = z$ et $p(x') = z'$.

On peut reconstruire cette fonction distance dans \overline{D} comme suit : soient x et x' deux points de \overline{D} , où $p(x) = z$ et $p(x') = z'$. Alors $d(z, z') = \inf \sum d(x_m, x'_m)$, où l'infimum est pris sur tous les ensembles finis de points $x_1, x'_1, \dots, x_j, x'_j$ dans \overline{D} , tels que $p(x_1) = z$, $p(x'_m) = p(x_{m+1})$ et $p(x'_j) = z'$.

Il est facile de voir qu'avec cette définition de distance, l'espace $Z = \mathbb{X}/G$ est un espace métrique complet.

Chapitre 2

Théorème de Poincaré

D'après [8], [3] et [11]

2.1 Hypothèses

On se donne un espace métrique \mathbb{X} , ainsi que son groupe d'isométries \mathbb{G} . On suppose que $n \geq 2$.

On se donne un polyèdre D , tel que les côtés de D soient identifiés et appariés par des éléments de \mathbb{G} . Notre but est de donner des conditions sur D pour garantir que le groupe H engendré par les identifications des côtés de D , soit discret, et que D soit un polyèdre fondamental pour H .

Notre première condition est que les côtés de D soient appariés par des éléments de \mathbb{G} . C'est à dire, on suppose que pour chaque côté s de D , il y a un côté s' (non nécessairement distinct de s) et un élément $g_s \in \mathbb{G}$, qui satisfait les conditions suivantes :

$$(1) \quad g_s(s) = s'$$

$$(2) \quad g_{s'} = g_s^{-1}$$

Les isométries g_s sont appelées les **transformations appariantes**.

Puisque s et s' sont tous deux des côtés de D , $g_s(D)$ et D reposent tous deux soit du même côté de s' , soit du côté opposé. S'ils reposent du même coté, alors on aurait $g_s(D) \cap D \neq \emptyset$. Ceci nous donne notre troisième condition :

$$(3) \quad g_s(D) \cap D = \emptyset$$

Soit H le groupe engendré par les transformations appariantes. On remarque que s'il y a un côté s tel que $s' = s$, alors la condition (2) implique que $g_s^2 = Id$. Si cela se produit, la relation $g_s^2 = Id$ est appelée **relation de réflexion**.

Les transformations appariantes induisent une relation d'équivalence sur \overline{D} , où chaque point de D est seulement équivalent à lui-même. Soit D^* l'espace des classes d'équivalence,

avec la topologie usuelle, c'est à dire que la projection $p : \overline{D} \rightarrow D^*$ est continue et ouverte. Si D est supposé être un polyèdre fondamental pour H , alors la condition (4) de la définition du polyèdre fondamental réclame qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points dans chaque classe d'équivalence des points de \overline{D}

$$(4) \quad \forall z \in D^*, p^{-1}(z) \text{ est un ensemble fini}$$

Nos deux prochaines conditions sont relatives aux arêtes. Comme dans l'explication des cycles pour un polyèdre fondamental, les arêtes viennent en cycle; la condition ci-dessus garantissant que chaque cycle est fini. Pour chaque arête $e = e_1$, soit (e_1, \dots, e_k) , la suite ordonnée des arêtes dans le cycle contenant e . (Comme précédemment, k est choisi pour être la plus petite période telle que les suites d'arêtes, de couples de côtés et de transformations appariantes soient toutes de période k). Soit alors g_1, \dots, g_k les transformations appariantes correspondantes. Alors la **transformation cyclique** $h = h(e) = g_k \circ \dots \circ g_1$ garde e invariant. Comme précédemment, h dépend du choix du côté accolant à e . Si on choisit l'autre côté pour commencer, alors on obtient h^{-1} par la transformation en cycle.

$$(5) \quad \forall e \text{ arête de } D, \exists t \in \mathbb{N} / h^t = Id$$

Les relations dans H , de la forme $h^t = Id$ sont appelées les **relations cycliques**. Il n'y a essentiellement qu'une seule relation cyclique pour chaque classe d'équivalence de cycles. Si e' est équivalent à e , alors $h(e')$ est conjugué à $(h(e))^{\pm 1}$. Continuant comme pour les polyèdres fondamentaux, on pose $\alpha(e)$ l'angle mesuré à l'intérieur de D correspondant à l'arête e . Il nous faut alors :

$$(6) \quad \sum_{m=1}^k \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{t}$$

Les conditions citées jusqu'à maintenant sont suffisantes pour garantir que si l'on regarde D et les translatsés de D que l'on peut accoler à D , alors les fermetures de ceux-ci se rassemblent ensemble sans se chevaucher, excepté le long des translatsés des côtés, pour remplir un voisinage de D (\Rightarrow voir Lemme 1 plus tard)

Afin d'établir la dernière condition, on a besoin de la construction suivante :

On forme tout d'abord le groupe H^* , défini pour être le groupe abstrait engendré par les transformations appariantes et satisfaisant les relations de réflexions et les relations cycliques. On munit également H^* de la topologie discrète. Il existe alors un homéomorphisme naturel $\sigma : H^* \rightarrow H$.

On considère ensuite la relation d'équivalence \sim sur $H^* \times \overline{D}$ définie comme suit : les couples (g_1^*, x_1) et (g_2^*, x_2) sont équivalents s'il existe une transformation appariante f telle que $f(x_1) = x_2$ et si, en tant qu'éléments de H^* , on a $g_2^* = g_1^* \circ f^{-1}$. Soit $X^* = (H^* \times \overline{D}) / \sim$. On munit X^* de la topologie d'identification usuelle, telle que la projection naturelle de $H^* \times \overline{D}$ dans X^* soit continue.

On remarque qu'il n'est pas encore clair, à ce moment, que la relation d'équivalence est localement finie. C'est à dire, il peut exister une infinité de points de la forme $(f_m^*, x) \in H^* \times \overline{D}$ qui soient tous identifiés dans X^* .

Il y a une application naturelle $q : X^* \rightarrow D^*$, définie par la composée de la projection sur le deuxième facteur de $H^* \times \overline{D}$, et de la projection p de \overline{D} dans D^* . Il est facile de voir que q est bien définie et continue.

Il y a également une application $r : X^* \rightarrow X$, définie par $r(g^*, x) = \sigma(g^*)(x)$. Il est facile de voir que r est bien définie et continue. Finalement, notre but est de montrer que r est un homéomorphisme, et donc que a fortiori, σ est un isomorphisme.

On peut voir X^* comme l'ensemble des translatés de \overline{D} sous H^* , où ces différents translatés ont été "cousus" ensemble en leurs côtés, de façon à ce que l'application r soit bien définie.

Dans le Lemme 1 ci-dessous, on prouve que r est un homéomorphisme local. Une fois ce fait établi, on peut utiliser r pour tirer la métrique locale différentielle de \mathbb{X} dans X^* . Alors la distance entre des points de X^* est la borne inférieure des longueurs des chemins de classe \mathcal{C}^1 joignant ces points. On utilise la distance sur X^* et la projection q pour définir une distance sur D^* . La distance $d(z, z')$ entre deux points $z, z' \in D^*$ est la borne inférieure des distances $d(x, x')$ où $q(x) = z$ et $q(x') = z'$.

Il est facile de voir que ceci est une notion naturelle de distance sur D^* . Ce qui signifie que $d(z, z') = \inf \sum d(x_m, x'_m)$ où la borne inférieure est prise sur tous les ensembles finis de points $x_1, x'_1, \dots, x_k, x'_k$ inclus dans \overline{D} , tels que $p(x_1) = z, p(x'_m) = p(x_{m+1})$ et $p(x'_k) = z'$.

Notre dernière condition est :

$$(7) \quad D^* \text{ est un espace complet}$$

2.2 Enoncé du théorème de Poincaré

Théorème. *Soit D un polyèdre muni de transformations appariantes, satisfaisant : pour tout côté s , il existe un côté s' et une transformation appariante g_s tels que :*

- (1) $g_s(s) = s'$
- (2) $g_{s'} = g_s^{-1}$
- (3) $g_s(D) \cap D = \emptyset$
- (4) *On a une relation d'équivalence sur \overline{D} : $z \sim z' \Leftrightarrow \exists g_s \text{ tq } g_s(z) = z'$.
Chaque classe d'équivalence sur \overline{D} doit être de cardinal fini*
- (5) **Condition sur les cycles d'arêtes :**
 $\forall e$ arête de D de cycle d'arêtes $h, \exists t \in \mathbb{N}^* / h^t = Id$
(ie chaque cycle d'arêtes est fini)
- (6) **Condition sur les angles aux arêtes :**
 $\sum_{m=1}^k \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{t}$ avec $(e_i)_i$ cycle de longueur k et d'ordre t
- (7) D^* est un espace complet

Alors :

- H , le groupe engendré par les transformations appariantes, est discret
- D est un polyèdre fondamental pour H
- Les relations de réflexion et les relations cycliques forment un ensemble complet des relations pour H

2.3 Lemme et démonstration

Lemme 1. *Soit D un polyèdre muni de transformations appariantes, satisfaisant les conditions (1) à (6). Alors chaque point $z^* \in D^*$ possède un voisinage U tel que $q^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ensembles ouverts relativement compacts U_α , où pour chaque α , $r|_{U_\alpha}$ est un homéomorphisme sur un ensemble convexe.*

On remarque d'abord que H^* agit comme groupe d'homéomorphismes sur X^* et que $\text{Id} \times D$ est un "domaine fondamental" pour cette action; c'est à dire qu'aucune H^* -translation non triviale de $\text{Id} \times D$ ne l'intersecte, et l'union des translatés de fermetures recouvre totalement X^* . On remarque également que ce lemme annonce que les translatés de D par ces transformations appariantes (on sait que ces translatés accolent D), remplissent précisément un voisinage de D .

Si x est un point intérieur à D , soit δ la distance de x au côté le plus proche, et soit $V = B(x, \delta)$. On pose $U = p(V)$. Puisque chaque point de V n'est seulement équivalent qu'à lui-même, les images réciproques de V par les éléments de X^* sont précisément les ensembles de la forme $U_\alpha = g^* \times V$: ce sont des ouverts disjoints et pour chaque α , $r|_{U_\alpha}$ est un homéomorphisme vers la boule de rayon δ .

Si x est un point intérieur à un côté s de D , alors il existe un autre côté s' et une transformation appariante g telle que $g(s) = s'$. Soit $x' = g(x)$. Si $x \neq x'$, on pose δ le minimum de la distance entre x et x' , la distance de x à n'importe quel autre côté de D différent de s , et la distance entre x' et n'importe quel autre côté de D différent de s' . Soit $V = B(x, \frac{\delta}{2}) \cap \overline{D}$ et $V' = B(x', \frac{\delta}{2}) \cap \overline{D}$. On peut remarquer que V et V' sont disjoints. On pose $U = p(V) \cup p(V')$.

Si $x = x'$, soit δ la distance minimale entre x et un autre côté de D différent de s , soit V l'intersection de la boule centrée en x et de rayon $\frac{\delta}{2}$ avec \overline{D} . On pose $U = p(V)$

Chaque composante U_α de $q^{-1}(U)$ consiste de l'union de deux demi-boules. Si $x \neq x'$, alors près de (Id, x) , on a les demi-boules $\text{Id} \times V$ et $g^{-1} \times V'$. Si $x = x'$, on a $\text{Id} \times V$ et $g^{-1} \times V$. Puisque x' est l'unique autre point de \overline{D} équivalent à x , chaque U_α est un voisinage d'un point de la forme $(g^*, x) \in X^*$. Il est clair que $r|_{U_\alpha}$ est un homéomorphisme vers la boule de rayon $\frac{\delta}{2}$.

Puis prenons $x = x'$ un point intérieur d'une arête e_1 . Soit (e_1, e_2, \dots, e_k) le cycle d'arêtes contenant e_1 , et soit $h = g_k \circ g_{k-1} \circ \dots \circ g_1$ la transformation cyclique de l'arête e_1 et soit t l'ordre de h . On définit les tk éléments de H^* j_1, \dots, j_{tk} par $j_1 = g_1, j_2 = g_2 \circ g_1, \dots, j_k = h, j_{k+1} = g_1 \circ h, \dots, j_{tk-1} = g_{k-1} \circ \dots \circ g_1 \circ h^{t-1}, j_{tk} = \text{Id}$. Soit $x_{m+1} = j_m(x_1)$. Chacun des points x_m repose dans l'intersection de deux côtés. On pose δ_m le minimum

de la distance de x_m à un autre côté de D , et de la distance de x_m à n'importe quel autre $x_i \neq x_m$. Soit $\delta = \frac{\min(\delta_m)}{2}$ et soit $V_m = B(x_m, \delta) \cap \overline{D}$. On remarque que les ensembles V_m sont tous disjoints, et soit $U = \bigcup p(V_m)$. Chaque composante U_α de $q^{-1}(U)$ est une union de tk "coins". Près de (Id, x) , ces coins sont les ensembles $(\text{Id} \times V_1), \dots, (j_{tk-1}^{-1} \times V_{tk})$.

Chaque coin repose sur l'intersection d'exactly deux côtés, et chaque côté détermine uniquement sa transformation appariante. Il suit d'après la condition (5) que $\{(\text{Id}, x_1), (j_1^{-1}, x_2), \dots, (j_{tk-1}^{-1}, x_{tk})\}$ est un ensemble complet de points équivalents de $H^* \times \overline{D}$. La condition (6) assure que dans le plan (de dimension 2 orthogonal à e_1 , ces tk translatés de D se collent ensemble sans se chevaucher, et remplissent un voisinage de x dans ce plan. Il suit que $r|_{U_\alpha}$ est un homéomorphisme vers la boule de rayon δ . Utilisant l'action de H^* dans X^* , on voit que le même raisonnement est vrai pour un point arbitraire de la forme (g^*, x) .

A présent, on suppose que pour tout p , $2 \leq p < \widehat{p}$, et pour tout point x , qui est un point intérieur d'une face de D de codimension p , il y a un voisinage U de $p(x)$, tel que notre lemme marche. Soit \widehat{F} une face de codimension \widehat{p} et soit x un point intérieur de \widehat{F} . Soit $x = x_1$ et x_2, \dots, x_k les points de \overline{D} qui sont équivalents à x , et soit j_m l'élément de H^* tel que $j_m(x) = x_m$ (on identifie les notations des éléments de H avec les éléments de H^*). Chaque x_m repose dans l'intersection d'un certain nombre de côtés de D . Soit δ_m le minimum de la distance d'un point x_m à n'importe quel autre côté de D , et de la distance de x_m à n'importe quel x_k , $k \neq m$. On pose $\delta = \frac{\min(\delta_m)}{2}$. Soit \widehat{F}_m la face de codimension \widehat{p} sur laquelle repose x_m , et soit \widetilde{F}_m le plan de dimension \widehat{p} orthogonal à \widehat{F}_m passant par x_m . On pose $\widetilde{V}_m = B(x_m, \delta) \cap \widetilde{F}_m$ et pour chaque $\widetilde{\delta} < \delta$, on pose $\widetilde{V}_m = B(x_m, \widetilde{\delta}) \cap \widetilde{F}_m$. Soit $\widetilde{U} = \bigcup p(\widetilde{V}_m)$ et soit $\widehat{U} = \bigcup p(\widehat{F}_m)$. On a alors que \widehat{U} est la restriction d'un voisinage de $z = p(x)$ à $p(\widehat{F}_1) = \dots = p(\widehat{F}_m)$. On peut montrer sans difficulté que les composantes de $q^{-1}(\widetilde{U})$ sont relativement compactes et que r , restreint à n'importe lequel de ces ensembles est un homéomorphisme.

La frontière de $p^{-1}(\widetilde{U})$ repose entièrement dans des faces de D de codimension p , $p < \widehat{p}$, et sont dans D . Donc pour chaque composante \widetilde{U}_α de $q^{-1}(\widetilde{U})$, $r|_{\partial \widetilde{U}_\alpha}$ n'est pas seulement un homéomorphisme local, mais un recouvrement de son image. Près du point (Id, x) , on voit facilement que l'image de $r|_{\partial \widetilde{U}_\alpha}$ est l'entière sphère de dimension \widehat{p} de centre x et de rayon $\widehat{\delta}$. Puisque $\widehat{p} \geq 2$, $r|_{\partial \widetilde{U}_\alpha}$ est un homéomorphisme.

Les arguments précédents montrent qu'il n'y a pas de translatés de $\text{Id} \times x$ sur $\text{Id} \times \overline{D} \in X^*$, (autres que ceux qui sont triviaux). Il en résulte que chaque composante U_α est relativement compacte dans X^* .

Les arguments ci-dessus étant indépendants du rayon $\widehat{\delta}$, on a donc que pour chaque α , $r|_{U_\alpha}$ est un homéomorphisme. On pose $U = \widetilde{U} \times \widehat{U}$ et on remarque que pour chaque α , U_α est relativement compact dans X^* et $r|_{U_\alpha}$ est un homéomorphisme vers un produit de disques, qui est convexe.

Corollaire. *Soit D un polyèdre muni d'identifications satisfaisant les conditions (1) à (6). Alors $r : X^* \rightarrow r(X^*)$ est un recouvrement.*

Chapitre 3

Exemples et illustrations en dimension 2

3.1 Polygones réguliers

Le théorème de Poincaré vu précédemment peut s'écrire un peu plus simplement dans certains cas particuliers en dimension 2. Un polyèdre en dimension 2 est couramment appelé un *polygone*. Ses faces de dimension 1 sont appelées les *côtés* (ou éventuellement les arêtes) et ses faces de codimension 2 les *sommets*.

Dans toute la suite, on considèrera à présent que les polygones étudiés sont *réguliers*, c'est à dire que si on numérote s_1, s_2, \dots, s_n les n sommets d'un polygone P , alors

$$d(s_1, s_2) = d(s_2, s_3) = \dots = d(s_{n-1}, s_n) = d(s_n, s_1)$$

où d désigne la métrique usuelle sur l'espace métrique considéré (cf Chapitre 1).

Ici, on passera rapidement sur le cas de l'espace euclidien, les exemples étant facilement "visualisables". On regardera plus en détail les espaces hyperboliques tels que le modèle de Poincaré \mathbb{H}^2 , le modèle sphérique \mathbb{B}^2 ou encore le modèle de Klein \mathbb{K}^2 .

Rappelons qu'un polygone correspond à l'intersection d'un nombre de demi-espaces délimités par des hyperplans de l'espace. L'espace étudié ici étant de dimension 2, les "hyperplans" traceurs sont donc les "droites" de l'espace, donc ici les droites hyperboliques de l'espace étudié, appelées *géodésiques*. Il semble donc nécessaire de rappeler quelles sont les géodésiques de \mathbb{H}^2 , \mathbb{B}^2 et \mathbb{K}^2 .

D'après [13]

Géodésiques dans \mathbb{H}^2 Ce sont exactement les droites verticales (c'est à dire les droites d'équation $x = a, a \in \mathbb{R}$) et les arcs de cercles orthogonaux à l'axe des réels

Géodésiques dans \mathbb{B}^2 Ce sont exactement les diamètres euclidiens de la sphère \mathbb{S}^1 , ainsi que les arcs de cercles orthogonaux à la sphère \mathbb{S}^1

Géodésiques dans \mathbb{K}^2 Ce sont exactement les droites euclidiennes tracées dans la boule \mathbb{B}^2

Les représentations des polygones différeront quelque peu d'un modèle à l'autre mais l'énoncé du théorème reste vrai pour un espace hyperbolique quelconque \mathbb{X} .

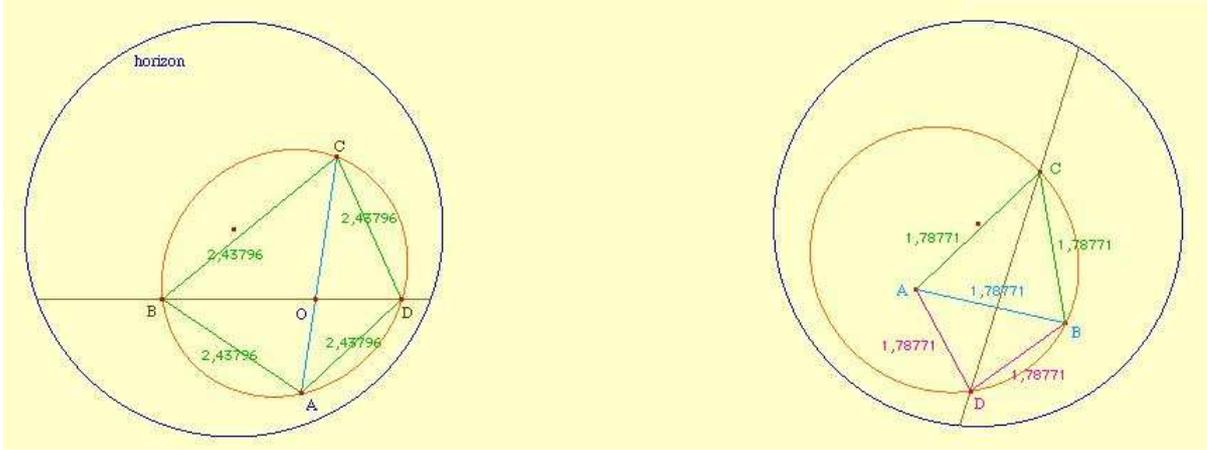


FIG. 3.1 – A gauche, un carré hyperbolique dans le modèle \mathbb{B}^2 . A droite, deux triangles équilatéraux dans le modèle \mathbb{K}^2

(Source : [1])

3.2 Théorème de Poincaré simplifié

D'après [7]. Soit P un polygone régulier à n sommets dans \mathbb{X} , un des espaces hyperboliques \mathbb{E}^2 , \mathbb{H}^2 , \mathbb{B}^2 ou \mathbb{K}^2 . Notre problème est de savoir si P est un polygone fondamental pour notre espace, c'est à dire si P peut être à la base d'un pavage régulier de notre espace \mathbb{X} par un groupe d'isométries précis $H \subset \mathbb{G}$, où \mathbb{G} désigne l'ensemble des isométries de l'espace \mathbb{X} .

Théorème. *Soit P un polygone hyperbolique régulier à n côtés, tel que la mesure des angles de ses sommets soit $\frac{2\pi}{q}$ avec $q \geq 3$. Soit H le sous groupe de \mathbb{G} engendré par les n réflexions hyperboliques par rapport aux côtés de P . Alors P est un polygone fondamental pour H et (P, H) est donc un pavage régulier de l'espace \mathbb{X}*

En effet, ceci est une conséquence directe du théorème général énoncé dans le chapitre 2 (c'est même un cas particulier, dans le cas où il n'y a qu'une relation cyclique correspondant à la suite des arêtes (e_1, e_2, \dots, e_n)).

Ainsi, une conséquence importante de ce théorème, est que lorsqu'on a un polygone hyperbolique régulier tel que les angles aux sommets soient des "diviseurs" de 2π , alors on obtient un pavage régulier de l'espace hyperbolique en effectuant les réflexions hyperboliques successives par rapport aux côtés du polygone, puis de son image, et ainsi de suite.

Remarque : par "diviseur" de 2π , on entend la définition suivante :

Soit x un réel. y est un "diviseur" de x si et seulement si il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $x = dy$

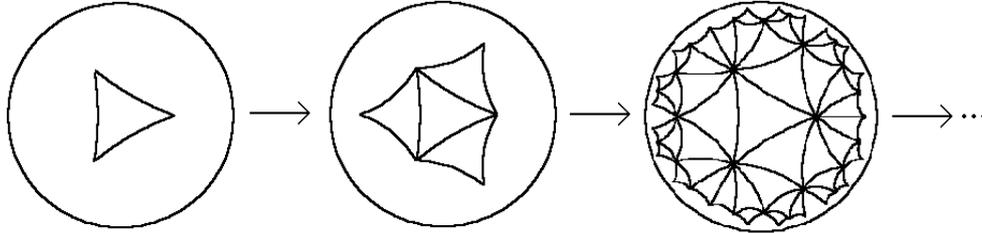


FIG. 3.2 – Exemple d'un pavage régulier par un triangle équilatéral dans le modèle \mathbb{B}^2
(Source : [7])

3.3 Pavages de \mathbb{E}^2 par des polygones réguliers

Le théorème simplifié de Poincaré étant valable dans l'espace euclidien \mathbb{E}^2 en tant qu'espace hyperbolique de distance usuelle la métrique euclidienne, on peut se demander dans cet espace quels polygones réguliers sont fondamentaux pour les symétries par rapport à leurs côtés.

D'après le théorème, il faut donc que les angles aux sommets soient des diviseurs de 2π .

◊ Un triangle équilatéral est toujours un polygone fondamental de l'espace euclidien \mathbb{E}^2 . (En effet, ses angles sont tous égaux à $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$)

◊ Un carré est toujours un polygone fondamental de l'espace euclidien \mathbb{E}^2 . (En effet, ses angles sont tous égaux à $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$)

◊ Un pentagone ne sera jamais un polygone fondamental de l'espace euclidien \mathbb{E}^2 . En effet, considérons par exemple le polygone régulier formé par les $\omega_k = \exp(\frac{i2k\pi}{5})$ pour $k = 0..4$, les 5 racines 5-ièmes de l'unité dans \mathbb{C} . Un rapide calcul montre que chaque angle au sommet fait $\frac{3\pi}{5}$, ce qui ne correspond pas à la forme voulue. Tout pentagone de \mathbb{E}^2 étant semblable à $(\omega_0\omega_1\dots\omega_4)$, on peut en déduire que nul pentagone n'est base d'un pavage régulier de l'espace \mathbb{E}^2 .

◊ Dans le cas général, soit P un polygone régulier à n côtés. P est alors semblable au polygone régulier à n cotés $P_0 = (\omega_0\omega_1\dots\omega_{n-1})$ formé des n racines n -ièmes de l'unité :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \quad \omega_k = \exp\left(\frac{i2k\pi}{n}\right)$$

Un rapide calcul montre que chaque angle au sommet de P_0 a une valeur de $\frac{(n-2)\pi}{n}$. P_0 vérifie alors la condition sur les angles si et seulement si $\frac{2n}{n-2} \in \mathbb{Z}$, c'est à dire si et seulement si $n-2$ divise $2n$.

Les seuls n vérifiant $n - 2$ divise $2n$ sont 3, 4 et 6. On en conclut donc que les seuls polygones réguliers qui sont à la base d'un pavage régulier de l'espace \mathbb{E}^2 sont :

- les triangles équilatéraux
- les carrés
- les hexagones

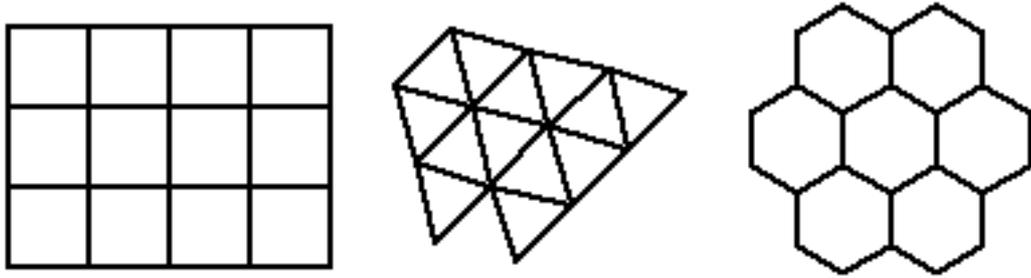


FIG. 3.3 – Les trois pavages possibles de l'espace euclidien \mathbb{E}^2 par des polygones réguliers
(Source : <http://www.jlsigrist.com/pavereg.html>)

3.4 Pavages hyperboliques

Pour terminer, nous allons donner quelques exemples de pavages des espaces hyperboliques par des polygones réguliers, sans souci de démonstration. D'après [1] et [6]

Théorème. *Soit P un polygone régulier à n côtés de même longueur et d'angles aux sommets tous égaux. Alors, ce polygone P est inscritible dans un cercle et chaque côté est vu du centre sous un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$.*

Ici, la différence avec le cas de l'espace euclidien tient dans le fait qu'en géométrie hyperbolique, il existe des carrés dont les angles aux sommets sont compris entre 0 et 90 degrés (exclus), tout comme des hexagones ayant un angle au sommet compris entre 0 et 120 degrés (exclus).

Il en résulte que si on veut paver l'espace hyperbolique de polygones à n côtés, il y a toujours un pavage régulier avec p polygones autour de chaque sommet dès que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$$

3.4.1 Exemples de pavages du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2

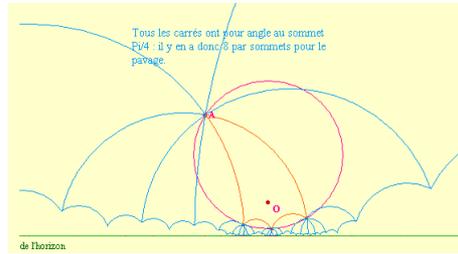


FIG. 3.4 – Pavage de \mathbb{H}^2 par un carré d'angles égaux à $\frac{\pi}{4}$
(Source : [1])

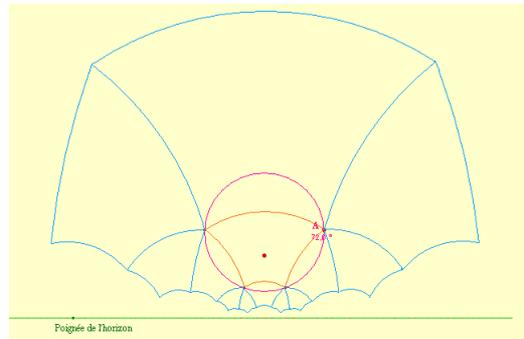


FIG. 3.5 – Pavage de \mathbb{H}^2 par un carré d'angles égaux à $\frac{2\pi}{5}$
(Source : [1])

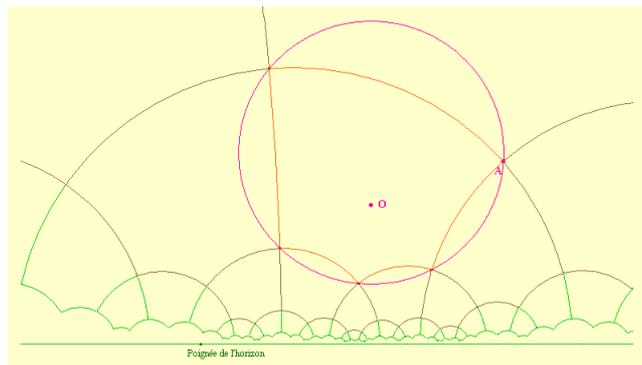


FIG. 3.6 – Pavage de \mathbb{H}^2 par un pentagone d'angles égaux à $\frac{\pi}{2}$
(Source : [1])

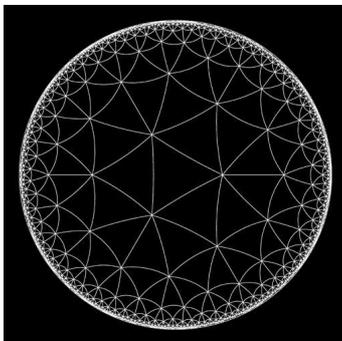
3.4.2 Exemples de pavages du modèle sphérique de Poincaré \mathbb{B}^2 

FIG. 3.7 – Exemple où P est un triangle équilatéral de centre le point O
(Source : [6])

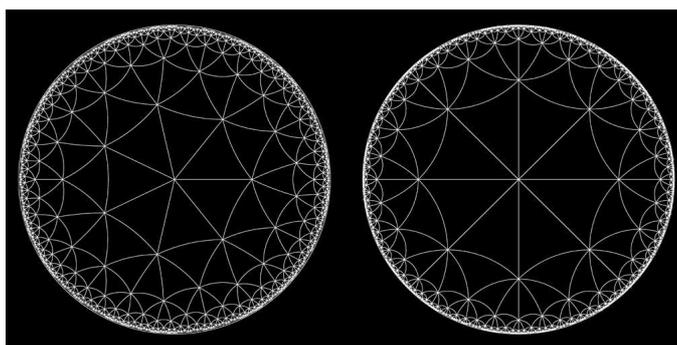


FIG. 3.8 – Exemples où P est un triangle équilatéral où un des sommets est le point O
(Source : [6])

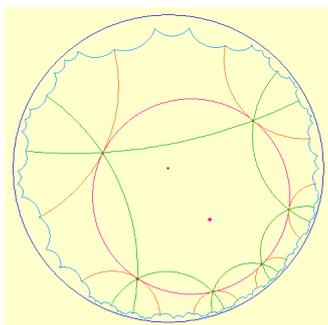


FIG. 3.9 – Exemple où P est un hexagone régulier d'angles aux sommets égaux à $\frac{\pi}{3}$
(Source : [1])

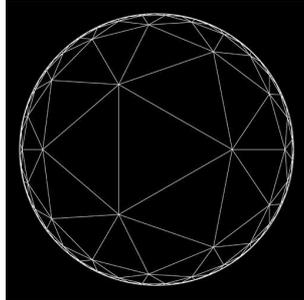
3.4.3 Exemples de pavages du modèle de Klein \mathbb{K}^2 

FIG. 3.10 – Exemple où P est un triangle équilatéral de centre le point O
(Source : [6])

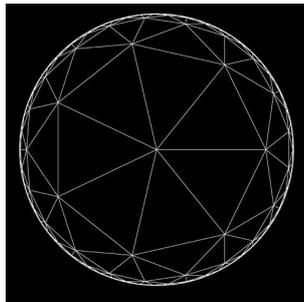


FIG. 3.11 – Exemple où P est un triangle équilatéral où un des sommets est le point O
(Source : [6])

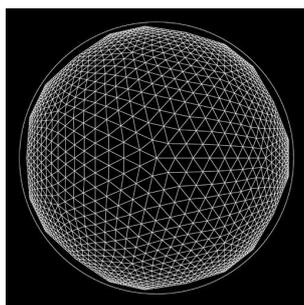


FIG. 3.12 – Même exemple que le précédent où P est un triangle équilatéral où un des sommets est le point O , mais où les côtés sont de longueurs plus petites
(Source : [6])

Bibliographie

- [1] Abracadabri. Pavages hyperboliques réguliers dans les modèles de Poincaré. <http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/HyperCJ/Pavage01.html>.
- [2] Thierry Barbot. Géométrie hyperbolique et anti-de Sitter, 2002. ENS Lyon, Support de cours Master 2 Recherche, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/barbot/COURS/ADS1/cours4.pdf>.
- [3] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [4] Yves Benoist. Pavages du plan. www.math.polytechnique.fr/xups/xups01.01.ps.gz.
- [5] Thérèse Eveilleau. Les 17 types de pavages. http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm.
- [6] Bernie Freidin. Hyperbolic and spherical tiling gallery. <http://bork.hampshire.edu/bernie/hyper/index.html>.
- [7] Inconnu. Théorème de Poincaré simplifié et classification des pavages. <http://quosmovicalculosinutraquepartepone.blogspot.com/>.
- [8] Bernard Maskit. *Kleinian Groups*. Springer-Verlag, 1980.
- [9] J. Paupert, M. Deraux, and E. Falbel. New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space. <http://www.math.jussieu.fr/paupert/defalpop.pdf>.
- [10] Julien Paupert. Configurations de Lagrangiens, domaines fondamentaux et sous-groupes discrets de $PU(2,1)$. <http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011502>.
- [11] Emmanuel Pedon. Demi-plan de Poincaré, $sl(2,r)$ et ses sous-groupes discrets, http://emmanuel.pedon.free.fr/mathsgt_fichiers/exposes1_2_3.pdf.
- [12] Claude Roger. Groupes de Lie classiques, support de cours Master 1 Recherche, UCLB, 2006.
- [13] George Tomanov. Géométrie différentielle, support de cours Master 1 Recherche, UCLB, 2006.
- [14] Eric Toubiana and Ricardo Sá Earp. *Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann*. Diderot, 1997.
- [15] Abdelghani Zeghib. (g,x) structures et trous noirs. ENS Lyon, Notes de cours Master 2 Recherche, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/zeghib/Barbot.pdf>.