Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense

Gourdon, *Analyse*, page 293

Exercice :

1. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On suppose que (E, d) est complet. On considère une suite (f_n) d'applications continues de E dans F, convergeant simplement vers une application f de E dans F.

   (a) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

   $$F_{n,s} = \{x \in E \ / \ \forall p \geq n, \delta\left(f_n(x), f_p(x)\right) \leq \varepsilon\}$$

   Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E et que

   $$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon, \ \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \ / \ \forall x \in V, \ \delta\left(f(x_0), f(x)\right) \leq 3\varepsilon$$

   (b) En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est un résiduel.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

1. (a) Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \geq n$, l'ensemble $G_p = \{x \in E \ / \ \delta\left(f_n(x), f_p(x)\right) \leq \varepsilon\}$ est fermé (car f_n et f_p sont continues) donc $F_{n,\varepsilon} = \bigcap\limits_{p\geq n} G_p$ est fermé.

   Par hypothèse, la suite (f_n) converge simplement, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = E$, ce qui entraîne que

   $$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$$

   est un ouvert dense dans l'espace complet E.

   Ceci étant, soit $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$. Comme f_n est continue, il existe un voisinage V de x_0 inclus dans $\overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ tel que

   $$\forall x \in V, \quad \delta\left(f_n(x_0), f_n(x)\right) \leq \varepsilon$$

   Or

   $$\forall x \in V, \forall p \geq n, \ \delta\left(f_n(x), f_p(x)\right) \leq \varepsilon$$

   donc en faisant tendre p vers $+\infty$ (pour x et n fixés), on obtient $\delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in V$. Finalement,

   $$\forall x \in V, \delta\left(f(x), f(x_0)\right) \leq \delta\left(f(x), f_n(x)\right) + \delta\left(f_n(x), f_n(x_0)\right) + \delta\left(f_n(x_0), f(x_0)\right) \leq 3\varepsilon$$

   (b) Posons $R = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrons que f est continue en tout point de R. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Comme $x_0 \in \Omega_{\frac{1}{n}}$, d'après le résultat de la question précédente, il existe un voisinage V de x_0 tel que

   $$\forall x \in V, \ \delta\left(f(x), f(x_0)\right) \leq \frac{3}{n} \leq 3\varepsilon$$

   Ceci suffit à prouver que f est continue en x_0.

   L'ensemble des points de continuité de f contient donc R. C'est donc un résiduel, en particulier dense dans E d'après le théorème de Baire.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

   $$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} \end{array}$$

   La suite (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$. On en déduit d'après $1-(b)$ que l'ensemble des points de continuité de f' est un résiduel, en particulier dense dans $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}$ est complet.