Somme et produits de variables consécutives de Bernoulli

Degrave, *Probabilités-Statistiques ECS 2ème année*, pages 141 à 148

Exercice :
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

1. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.
   Alors, la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la v.a. constante égale à $2p$.
2. On pose $U_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = U_1 + \ldots + U_n$.
   Alors, la suite $\left(\dfrac{Z_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la v.a. constante égale à p^2.

1. Déterminons déjà la loi de Y_n.
   Les X_n étant indépendantes, on sait donc que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$. On a donc immédiatement :
   $$\mathbb{E}(Y_n) = 2p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y_n) = 2p(1-p)$$
   Calculons l'espérance et la variance de S_n.
   $$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = 2np$$
   On a aussi $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k + X_{k+1}) = X_1 + 2\sum_{k=2}^{n} X_k + X_{n+1}$.
   Comme les X_k sont indépendantes on en déduit que :
   $$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(X_1) + 4\sum_{k=2}^{n}\mathbb{V}(X_k) + \mathbb{V}(X_{n+1}) = p(1-p) + 4(n-1)p(1-p) + p(1-p) = (4n-2)p(1-p)$$
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc pour tout $\varepsilon > 0$:
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$
   c'est-à-dire :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{(4n-2)p(1-p)}{\varepsilon^2 n^2}\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$
   Ainsi, la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à $2p$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, U_k prend les valeurs 0 et 1 et :
   $$\mathbb{P}(U_k = 1) = \mathbb{P}([X_k = 1] \cap [X_{k+1} = 1]) = \mathbb{P}([X_k = 1])\,\mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) = p^2$$
   (car X_k et X_{k+1} sont indépendantes).
   On en déduit donc que $\mathbb{P}(U_k = 0) = 1 - p^2$.
   Donc U_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2. On en déduit donc que
   $$\mathbb{E}(U_k) = p^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(U_k) = p^2(1-p^2)$$
   Discutons selon les valeurs de i et j l'indépendance de Y_i et Y_j.
   - Si $j > i+1$ (ou si $i > j+1$), Y_i est fonction de X_i et X_{i+1} et Y_j est fonction de X_j et X_{j+1}. Les X_k étant indépendantes, Y_i et Y_j sont donc indépendantes.

- Si $j = i + 1$ (ou $i = j + 1$), alors :

$$\mathbb{P}\left([Y_i = 1] \cap [Y_j = 1]\right) = \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1] \cap [X_{i+2} = 1]) = p^3$$

Or,

$$\mathbb{P}(Y_i = 1)\mathbb{P}(Y_j = 1) = p^4$$

Comme $p \in]0,1[$, $p^3 \neq p^4$ et les deux v.a. Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(U_k) = p^2$$

et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

Le calcul de la variance de Z_n donne :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(U_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{cov}(U_i, U_j)$$

Si $j > i+1$, $\operatorname{cov}(U_i, U_j) = 0$ car U_i et U_j sont indépendantes.
Si $j = i+1$, $\operatorname{cov}(U_i, U_j) = \mathbb{E}(U_iU_j) - \mathbb{E}(U_i)\mathbb{E}(U_j)$.
Or :

$$\mathbb{E}(U_iU_j) = \mathbb{P}(U_iU_j = 1) = \mathbb{P}([U_i = 1] \cap [U_j = 1]) = p^3$$

Donc

$$\operatorname{cov}(U_i, U_j) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$$

On en déduit que :

$$\mathbb{V}(Z_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)\big(n(1-p) + 2(n-1)p\big) = p^2(1-p)(n+3np-2p)$$

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\infty}\dfrac{\mathbb{V}(Z_n)}{n^2\varepsilon^2} = 0$

La variable $\left(\dfrac{Z_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge donc en probabilité vers la variable constante égale à p^2.