C.N.S. d'indépendance de $\overline{X}$ et S^2.

Cottrell-Genon-Catalot-Duhamel-Meyre, *Exercices de probabilités*, page 211

> **Théorème :** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des V.A.R. indépendantes de même loi, d'espérance et de variance finies. On définit
>
> $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$
>
> Alors : $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes $\iff$ $X_1, \ldots, X_n$ sont gaussiennes.

Soit ${}^tX = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, avec $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi, d'espérance m, de variance σ^2 finie. On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad \Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \quad , \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que la loi des V.A.R. X_i est gaussienne, c'est-à-dire que $X_i \leadsto \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Alors, la vecteur $X \leadsto \mathcal{N}_n(m\mathbf{1}_n, \sigma^2 I_n)$ puisque ses composantes sont des gaussiennes indépendantes.

1. **Déterminons la loi de $\overline{X}$.**

   $\overline{X}$ est une combinaison linéaires des composantes de X, donc $\overline{X}$ est gaussienne. On a $E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = m$ et $Var(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$. Donc $\overline{X} \leadsto \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

2. **Déterminons la loi de $n\frac{\Sigma^2}{\sigma^2}$.**

   On a $n\frac{\Sigma^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2$, avec $\frac{X_i - m}{\sigma} \leadsto \mathcal{N}(0,1)$, donc $n\frac{\Sigma^2}{\sigma^2}$ est la somme des carrés de n V.A.R. gaussiennes centrées réduites indépendantes, donc $n\frac{\Sigma^2}{\sigma^2} \leadsto \chi^2(n)$.

3. **Montrons que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.**

   Pour montrer que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes, il suffit de montrer que $\overline{X}$ est indépendante du vecteur $Z = (X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})$, puisque S^2 est Z-mesurable. Or le vecteur $(\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est gaussien (car toute combinaison linéaire de ses composantes est une combinaison linéaire des X_i), et pour démontrer l'indépendance de $\overline{X}$ et de Z, il suffit de démontrer que $Cov(\overline{X}, X_i - \overline{X}) = 0$ pour tout i. Pour cela, on calcule

   $$Cov(\overline{X}, X_i) = Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\, ,\, X_i\right) = \frac{1}{n}Cov(X_i, X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

   comme $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, le résultat vient immédiatement.

4. **Montrons que $n\frac{S^2}{\sigma^2}$ suit une loi du $\chi^2(n-1)$.**

   $$nS^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$$

   On voit apparaître la différence d'une somme de n carrés et d'un terme carré.

   - **Supposons d'abord $m = 0$.**

     Comme ${}^tX \leadsto \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$, si A est une matrice orthogonale, le vecteur ${}^tY = (Y_1, \ldots, Y_n) = AX$ est aussi gaussien, avec $E(Y) = AE(X) = 0$, $Var(Y) = AVar(X){}^tA = \sigma^2 I_n$. Les composantes $Y_1, \ldots, Y_n$ sont donc indépendantes, et de plus $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, (la norme est conservée par A).

Il s'agit donc de choisir A pour que $Y_i^2 = n\overline{X}^2$, ce qui est possible en prenant comme première ligne de A : $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ \dots \ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Alors $nS^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2 = Y_2^2 + \ldots + Y_n^2$. On retrouve ainsi le fait que S^2 et $\overline{X}$ sont indépendantes puisque fonctions de $(Y_2, \ldots, Y_n)$ et Y_1. Enfin, puisque les V.A.R. Y_i sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on a $n\frac{S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$.

- **Supposons** $m \neq 0$.
  On se ramène au cas précédent, en posant $X_i^* = X_i - m$ et en remarquant que $nS^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^* - \overline{X^*})^2$.

En comparant 2. et 4., on voit qu'en remplaçant m par une valeur "estimée" $\overline{X}$, on "perd" un degré de liberté dans la loi du χ^2.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On ne suppose plus connue la loi des X_i, mais on suppose que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.

1. **Supposons $m = 0$. Calculons $E(nS^2)$ et montrons que $E(nS^2 e^{itn\overline{X}}) = (n-1)\sigma^2\varphi^n(t)$ pour tout t réel. En déduire φ et ainsi la loi des X_i.**

   On suppose seulement que les X_i sont indépendantes, de même loi, centrées et de variance finie, de fonction caractéristique φ. On a $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) = -\sigma^2$. Comme

   $$nS^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{i}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i<j} X_i X_j$$

   et que $E(X_i^2) = \sigma^2$, $E(X_iX_j) = 0$ $(i \neq j)$, on a $E(nS^2)(n-1)\sigma^2$.

   D'autre part, puisque S^2 et $\overline{X}$ sont indépendantes,

   $$E(nS^2 e^{itn\overline{X}}) = E(nS^2)E(e^{itn\overline{X}}) = E(nS^2)E(e^{it\sum_j X_j}) = (n-1)\sigma^2\varphi^n(t)$$

   Mais, en développant, on obtient

   $$E(nS^2 e^{itn\overline{X}} = E\left(\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{j} X_j^2 - \frac{2}{n}\sum_{j<k} X_j X_k\right) e^{it\sum_j X_j}\right)$$

   $$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{j} E\left(X_j^2 e^{itX_j} e^{it\sum_{k\neq j} X_k}\right) - \frac{2}{n}\sum_{j<k} E\left(X_j e^{itX_j} X_k e^{itX_k} e^{it\sum h\neq j,k X_h}\right)$$

   et en vertu de l'indépendance des X_i et du fait que $E(X_j^2 e^{itX_j}) = -\varphi''(t)$ et $E(X_j e^{itX_j}) = -it\varphi'(t)$, on a donc

   $$E(nS^2 e^{itn\overline{X}}) = -\left(1 - \frac{1}{n}\right) n\varphi''(t)\varphi^{n-1}(t) + \frac{2}{n}\frac{n(n-1)}{2}\varphi'^2(t)\varphi^{n-2}(t)$$

   d'où

   $$(n-1)\sigma^2\varphi^n(t) = -(n-1)\varphi''(t)\varphi^{n-1}(t) + (n-1)\varphi'(t)\varphi^{n-2}(t)$$

   d'où la relation

   $$\boxed{\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} - \left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^2 = -\sigma^2}$$

   En posant $\psi(t) = \log(\varphi(t))$, la relation s'écrit $\psi''(t) = -\sigma^2$, d'où $\psi'(t) = -\sigma^2 t$ et $\psi(t) = -\frac{\sigma^2}{2}t^2$ puisque $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.

   Donc $\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$ et la loi des X_i est gaussienne : $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

2. **Montrons que l'on peut se passer de l'hypothèse** $m = 0$.

   Supposons $m \neq 0$. Alors on peurt poser $X_i^* = X_i - m$, $\overline{X^*} = \overline{X} - m$. Alors $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^* - \overline{X^*})^2$, et l'indépendance de S^2 et $\overline{X}$ équivaut à l'indépendance de S^2 et $\overline{X^*}$, d'où le résultat.