

# Caractérisation des applications conformes

Eric Toubiana, Ricardo Sá Earp, *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*, page 45

**Théorème :** Soient  $U, V \subset \mathbb{C}$  deux parties ouvertes de  $\mathbb{C}$  et soit  $f : U \rightarrow V$  une application. Alors l'application  $f$  est conforme si et seulement si  $f$  est holomorphe et vérifie  $f'(z) \neq 0$  pour tout  $z \in U$ .

Appelons  $P$  et  $Q$  les parties réelles et imaginaires respectivement de  $f$ ,  $f(z) = P(z) + iQ(z)$ . Nous identifierons par la suite un nombre complexe  $z = x + iy$  avec le point de  $\mathbb{R}^2$  correspondant :  $(x, y)$ .

Supposons  $f$  conforme, en chaque point  $z \in U$ . La différentielle de  $f$  en  $z$ ,  $D_z f$ , est donc une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui conserve les angles. Soient  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ . Soit  $L$  la rotation de  $\mathbb{R}^2$  envoyant le vecteur  $D_z f(e_1)$  sur un vecteur "positivement" proportionnel à  $e_1$ , c'est-à-dire  $L(D_z f(e_1)) = \lambda e_1$  avec  $\lambda > 0$ . Du fait que  $D_z f$  conserve les angles,  $L \circ D_z f$  conserve également les angles. Par conséquent nous devons avoir  $D_z f(e_2) = \alpha e_2$  avec  $\alpha > 0$ . Clairement,  $L \circ D_z f$  est une homothétie de rapport  $\lambda$  et nous concluons donc que  $D_z f(\vec{u}) = \lambda L^{-1}(\vec{u})$ , pour tout vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  et si  $L^{-1}$  est la rotation d'argument  $\theta$  nous avons donc :

$$D_z f(\vec{u}) = \lambda(\cos \theta \cdot u_1 - \sin \theta \cdot u_2, \sin \theta \cdot u_1 + \cos \theta \cdot u_2)$$

pour tout vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ . Par ailleurs nous avons par définition :

$$D_z f(\vec{u}) = \left( \frac{\partial P}{\partial x}(z) \cdot u_1 + \frac{\partial P}{\partial y}(z) \cdot u_2, \frac{\partial Q}{\partial x}(z) \cdot u_1 + \frac{\partial Q}{\partial y}(z) \cdot u_2 \right)$$

pour tout vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ . En identifiant les relations (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z) = \cos \theta ; \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z) = -\sin \theta ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(z) = \sin \theta ; \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(z) = \cos \theta$$

Nous concluons donc que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z) \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z)$$

pour tout point  $z \in U$ . Ce sont précisément les relations de Cauchy-Riemann. Nous déduisons donc que  $f$  est holomorphe. De plus, en utilisant les relations de Cauchy-Riemann, nous avons :

$$D_z f(\vec{u}) = (\Re(f'(z))u_1 - \Im(f'(z))u_2, \Im(f'(z))u_1 + \Re(f'(z))u_2) = f'(z) \cdot (u_1 + iu_2) = f'(z) \cdot \vec{u}$$

et nous concluons donc que  $f'(z) \neq 0$  pour tout  $z \in U$ .

Réciproquement, supposons que  $f$  est holomorphe sur  $U$  et que  $f'(z) \neq 0$  pour tout  $z$ . Nous avons montré précédemment que pour tout  $z \in U$  et tout vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ , nous avons :

$$D_z f(\vec{u}) = f'(z) \cdot \vec{u}$$

où  $f'(z) \cdot \vec{u}$  est le vecteur obtenu en faisant subir à  $\vec{u}$  la rotation d'angle  $\arg(f'(z))$  et l'homothétie de rapport non nul  $\|f'(z)\|$ . Or chacune de ces deux transformations conserve les angles, ceci montre que  $f$  préserve les angles et par conséquent  $f$  est conforme.

**Application :** Le groupe des transformations conformes de  $\mathbb{D}$  est

$$\left\{ z \mapsto \lambda \cdot \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}, \quad \lambda, a \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, |a| < 1 \right\}$$

En effet, soit  $f(z) = \lambda \cdot \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$  avec  $\lambda$  et  $a$  comme spécifiés dans l'énoncé. On vérifie sans peine que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$ , puis que  $f$  est conforme puisque  $f$  est holomorphe et  $f'(z) \neq 0$  pour  $z \in \mathbb{D}$ . Par conséquent,  $f$  est une transformation conforme de  $\mathbb{D}$ .

Inversement, soit  $f$  une transformation conforme de  $\mathbb{D}$  et soit  $p = f(0)$ ,  $p \in \mathbb{D}$ . Remarquons que l'application  $h : z \mapsto \frac{z-p}{z\bar{p}-1}$  vérifie  $h(p) = 0$ . De ce fait l'application  $g = h \circ f$  est une transformation conforme de  $\mathbb{D}$  vérifiant  $g(0) = 0$ . Le lemme de Schwartz nous permet d'affirmer :

$$|g(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Mais  $g$  possède une application inverse  $g^{-1}$  qui est aussi une transformation conforme de  $\mathbb{D}$  et vérifiant  $g^{-1}(0) = 0$ . Par conséquent, nous obtenons également à l'aide du lemme de Schwarz que

$$|g'(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$$

Finalement, nous concluons que  $|g(z)| = |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ .

Remarquons à présent que l'application  $\frac{g(z)}{z}$  est définie et holomorphe sur tout  $\mathbb{D}$ . De plus, ce qui précède montre que l'image de cette application est le cercle unité. Comme une application holomorphe non constante est ouverte, nous concluons que cette fonction est constante. Par conséquent, il existe une constante complexe  $\lambda$  de norme 1,  $|\lambda| = 1$ , telle que

$$g(z) = \lambda z, \forall z \in \mathbb{D}$$

Nous concluons finalement que

$$f(z) = h^{-1}(\lambda z) = \lambda \frac{z - p\bar{\lambda}}{z\lambda\bar{p} - 1}$$

pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . De ce fait,  $f$  est bien de la forme voulue.