Caractérisation des endomorphismes normaux.

Monier, *Algèbre MP*, page 204

> **Théorème :** Soit $(E, <.|.>)$ un espace vectoriel hermitien, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalents :
>
> (i) f est normal (*i.e.* $f \circ f^* = f^* \circ f$)
>
> (ii) Pour tout sev F de E stable par f, F est stable par f^*
>
> (iii) Pour tout sev F de E stable par f, $F^\perp$ est stable par f.

(i)⇒(ii) et (i)⇒(iii)

Supposons que f soit normal soit F un sev de E stable par f.

Le sev F admet une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ et le sev $F^\perp$ admet une base orthonormale $\mathcal{B}_2$: notons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, qui est une base orthonormale de E.

Notons M la matrice de l'endomorphisme de f dans la base $\mathcal{B}$. Puisque F est stable par f, M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A et C sont carrés d'ordre $\dim(F)$ et $\dim(F^\perp)$ respectivement.

On a, en utilisant des produits par blocs :

$$(i) \iff MM* = M*M \iff \begin{cases} AA* + BB* = A*A \\ BC^* = A*B \\ CB* = B*A \\ CC* = B*B + C*C \end{cases}$$

En particulier, on a : $A*A - AA* = BB*$, d'où

$$\|B*\|^2 = tr(BB*) = tr(A*A - AA*) = tr(A*A) - tr(AA*) = 0$$

donc $B^* = 0$, et ainsi $B = 0$

Ainsi $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ce qui montre que $F^\perp$ est stable par f.

De plus, $M^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix}$, donc F et $F^\perp$ sont stables par f^*.

(ii)⇒(i)

Démontrons le résultat par récurrence sur la dimension de E.

La propriété est triviale lorsque $\dim(E) \leq 1$.

Supposons-la vraie pour tout espace vectoriel hermitien de dimension n, et soit E un espace vectoriel hermitien de dimension $n+1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout sev de E stable par f soit aussi stable par f^*.

Notons χ_f le polynôme caractéristique de f. On sait que χ_f est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de D'Alembert. Il existe donc $(\lambda_1, x_1) \in \mathbb{C} \times (E \backslash \{0\})$ tel que

$$f(x_1) = \lambda_1 x_1$$

En notant $e_1 = \dfrac{1}{\|x_1\|} x_1$, on a :

$$\|e_1\| = 1 \quad \text{et} \quad f(e_1) = \lambda_1 e_1$$

Puisque $\mathbb{C}e_1$ est stable par f, d'après l'hypothèse, $\mathbb{C}e_1$ est aussi stable par f^* : il existe donc $\mu_1 \in C$ tel que

$$f^*(e_1) = \mu_1 e_1$$

D'autre part, le sev $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ admet au moins une base orthonormale $\mathcal{B}'$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1) \cup \mathcal{B}'$ qui est une base orthonormale de E.

Les matrices de f et f^* dans $\mathcal{B}$ sont respectivement de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & M_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

où $L_1, M_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & M_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ L_1^* & A_1^* \end{pmatrix}$$

D'où $\mu_1 = \overline{\lambda_1}$, $L_1 = M_1 = 0$ et $B_1 = A_1^*$.

Ainsi, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, et donc $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ est stable par f.

Considérons l'endormorphisme f induit par f sur $(\mathbb{C}e_1)^\perp$, autrement dit, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice A_1.

Soit G un sev de $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ stable par g ; alors G (qui est aussi un sev de E) est stable par f, donc par f^* (hypothèse).

Or, g^* est l'endomorphisme induit par f^* sur G ; en effet, on a :

$$mat_{\mathcal{B}'}(g^*) = (mat_{\mathcal{B}'}(g))^* = A_1^* = B_1$$

G est donc stable par g^*.

Ainsi, tout sev de $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ stable par f l'est aussi par g^*.

D'après l'hypothèse de récurrence, g est normal, donc A_1 est normale.

Un produit par blocs permet de déduire que la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ est normale, et donc f est normal.

(iii)⇒(i)

On utilise la même méthode que ci-dessus.