Convergence commutative

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 202

Théorème : Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Alors

$$\sum |a_n| \text{ converge} \iff \forall \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}),\ \sum a_{\sigma(n)} \text{ converge}$$

• Supposons que $\sum |a_n|$ converge. Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. On en déduit que $\sum |a_{\sigma(n)}|$ converge et donc que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge.

Montrons, de plus, ce qui nous sera utile pour la suite de l'exercice, que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et un entier n_0 tel que $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| \leq \varepsilon$. Posons $n_1 = \max\limits_{k\in\{0,\dots,n_0\}} \sigma^{-1}(k)$. On a alors $\sigma(n) > n_0$ pour $n > n_1$. Pour $N > n_0, n_1$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq 2 \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| \leq 2\varepsilon$$

car les termes de la suite (a_n) d'indice inférieur à n_0 sont présents dans les deux sommes. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où l'égalité des sommes.

• Supposons maintenant que $\sum |a_n|$ diverge. Posons, pour tout entier n, $x_n = \Re(a_n)$ et $y_n = \Im(a_n)$. Puisque, pour tout n, $|a_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n| + |y_n|$, on en déduit que $\sum |x_n|$ ou $\sum |y_n|$ diverge.

Montrons que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ diverge, alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ tel que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge. Ceci nous montrera qu'on peut trouver $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ tel que $\sum x_{\sigma(n)}$ ou $\sum y_{\sigma(n)}$ diverge. On pourra conclure que $\sum a_{\sigma(n)}$ diverge.

Si (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang, $\sum u_n$ diverge et $\sigma = Id_{\mathbb{N}}$ convient. Sinon, il y a une infinité de termes strictement positifs et une infinité de termes strictement négatifs. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Puisque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, l'une des deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ diverge. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comportant les termes de la suite positifs ou nuls et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comportant les termes strictement négatifs. De ce qui précède, on déduit que $\sum u_{\varphi(n)}$ ou $\sum \psi(n)$ diverge. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\varphi(N)} u_n^+$ et $\sum\limits_{n=0}^{N} u_{\psi(n)} = -\sum\limits_{n=0}^{\psi(N)} u_n^-$. Supposons que $\sum u_{\varphi(n)}$ diverge. Alors $\lim\limits_{N\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} = +\infty$. On définit une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

⋆ n_1 est le plus petit entier tel que $u_{\psi(0)} + \sum\limits_{j=0}^{n_1} u_{\varphi(j)} > 1$; n_1 existe car $\lim\limits_{N\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} = +\infty$

⋆ $n_1, n_2, \dots, n_k$ étant déterminés, n_{k+1} est le plus petit entier supérieur à n_k tel que $u_{\psi(k)} + \sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} u_{\varphi(j)} > 1$; n_{k+1} existe pour les mêmes raisons que n_1.

Définissons maintenant σ, élément de $\mathcal{S}(\mathbb{N})$. On pose pour $n \in \{0, \dots, n_1\}$, $\sigma(n) = \varphi(n)$ et $\sigma(n_1 + 1) = \psi(0)$, puis pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour $n \in \{n_k + k + 1, \dots, n_{k+1} + k\}$, $\sigma(n) = \varphi(n - k)$ et $\sigma(n_{k+1} + k + 1) = \psi(k)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, σ réalise une bijection de $\{n_k+k+1, \dots, n_{k+1}+k\}$ sur $\varphi(\{n_k + k + 1, \dots, n_{k+1} + k\})$; σ réalise donc une bijection de $\mathbb{N}\backslash\{n_k + k, k \in \mathbb{N}^*\}$ sur $\varphi(\mathbb{N})$. D'autre part, σ réalise une bijection de $\{n_k + k, k \in \mathbb{N}^*\}$ sur $\psi(\mathbb{N})$. Puisque $\{\varphi(\mathbb{N}), \psi(\mathbb{N})\}$ est une partition de $\mathbb{N}$, σ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{N})$.

Enfin, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=0}^{n_k+k+1} u_{\sigma(n)} \geq k$, donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge. Si c'est $\sum u_{\psi(n)}$ qui diverge, il suffit de considérer la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de lui appliquer la démonstration qui précède pour montrer l'existence de $\sigma \in \mathcal{S}$ tel que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge.