Coordonnées barycentriques dans un triangle

Monier, *Géométrie MPSI*, pages 130 et 181

Théorème :
Soit $n = \dim(E) \geq 1$ et $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ une famille affinement libre de $n+1$ points ($i.e.$ il existe $i_0 \in \{1 \ldots, n+1\}$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i \neq i_0}$ soit libre dans E).

Alors, pour tout point M de E, il existe un unique $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$M = bar\begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$$

De plus, l'application $M \mapsto (x_1, \ldots, x_{n+1})$ définie précédemment est une bijection.

Avec ces notations, on appelle *coordonnées barycentriques de* M dans $(A_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ toute famille $(\lambda x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Soit $H = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$.
Pour tout $M \in E$, il existe $(x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ unique tel que

$$\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n+1} x_i \overrightarrow{A_1A_i}$$

puisque $(\overrightarrow{A_1A_i}_{2 \leq i \leq n+1}$ est une base de E.
On définit ainsi une application $\varphi : E \to H$.

Considérons ainsi l'application $\psi : H \to E$ qui, à tout élément $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de H, associe le point M de E défini par :

$$\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n+1} x_i \ \overrightarrow{A_1A_i}$$

Il est clair que $\psi \circ \varphi = Id_E$ et $\varphi \circ \psi = Id_H$, donc φ et ψ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Application :
Dans le plan affine euclidien, on considère ABC un triangle non aplati, non rectangle. On note

$$a = BC, \ b = AC, \ c = AB, \ \widehat{A} = \widehat{BAC}, \ \widehat{B} = \widehat{ABC}, \ \widehat{C} = \widehat{ACB}$$

Alors, les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) de G (centre de gravité), I (centre du cercle inscrit, I_A, I_B, I_C (centres des cercles exinscrits dans les angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$), H (orthocentre), O (centre du cercle circonscrit) sont :

$G(1,1,1)$
$I(a,b,c) \quad , \quad I_A(-a,b,c) \quad , \quad I_B(a,-b,c) \quad , \quad I_C(a,b,-c)$
$H(\tan\widehat{A}, \tan\widehat{B}, \tan\widehat{C})$
$O(\tan\widehat{B} + \tan\widehat{C}, \tan\widehat{A} + \tan\widehat{C}, \tan\widehat{A} + \tan\widehat{B})$

- $G(1,1,1)$

  Ceci découle de la définition de G comme isobarycentre des points A, B et C.

- $I(a,b,c)$, $I_A(-a,b,c)$, $I_B(a,-b,c)$, $I_C(a,b,-c)$

  On note A' (respectivement A'' le pied de la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle $\widehat{A}$. Montrons que

$$\boxed{\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{c}{b}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \frac{c}{b}}$$

En effet, si on applique la loi des sinus aux triangles $AA'B$ et $AA'C$, on a :

$$\frac{BA'}{\sin\left(\dfrac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{AA'B}\right)} \qquad \text{et} \qquad \frac{CA'}{\sin\left(\dfrac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{AA'C}\right)}$$

Or, on a que $\widehat{AA'B} + \widehat{AA'C} = \pi$, on en déduit que $\dfrac{BA'}{CA'} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$.

Enfin, comme $A' \in [BC]$, on conclut que $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{BA'}{CA'} = -\dfrac{c}{b}$.

Par un raisonnement analogue, on obtient que $\dfrac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \dfrac{BA''}{CA''} = \dfrac{c}{b}$ ce qui démontre les formules demandées.

De là, on considère $M = bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$

Or, $A' = bar\begin{pmatrix} B & C \\ b & c \end{pmatrix}$, donc $M = bar\begin{pmatrix} A & A' \\ a & b+c \end{pmatrix} \in (AA')$.

De même, $M \in (BB')$, $M \in (CC')$ et donc $M = I$.

Un raisonnement analogue donne les formules pour I_A, I_B et I_C.

- $H(\tan\widehat{A}, \tan\widehat{B}, \tan\widehat{C})$

  On note A' la projection orthogonale de A sur (BC). Montrons que

$$\boxed{A' = bar\begin{pmatrix} B & C \\ \tan\widehat{B} & \tan\widehat{C} \end{pmatrix}}$$

  Supposons d'abord $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ aigus. On a : $\dfrac{AA'}{BA'} = \tan\widehat{B}$ et $\dfrac{AA'}{CA'} = \tan\widehat{C}$.

  D'où $BA'.\tan\widehat{B} = CA'.\tan\widehat{C}$. Mais $A' \in [BC]$, on en déduit que :

$$\tan\widehat{B}.\overrightarrow{BA'} + \tan\widehat{C}.\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{O}$$

  c'est-à-dire :

$$A' = bar\begin{pmatrix} B & C \\ \tan\widehat{B} & \tan\widehat{C} \end{pmatrix}$$

  Le raisonnement est analogue si un des deux angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ est obtus.

  De là, en utilisant le fait que $\widehat{C} = \pi - \widehat{A} - \widehat{B}$, on a bien que $\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} \neq 0$.

  Notons alors $H' = bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ \tan\widehat{A} & \tan\widehat{B} & \tan\widehat{C} \end{pmatrix} = bar\begin{pmatrix} A & A' \\ \tan\widehat{A} & \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} \end{pmatrix} \in (AA')$.

  De même, $H' \in (BB')$, $H' \in (CC')$, d'om $H' = H$.

  Finalement

$$H = bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ \tan\widehat{A} & \tan\widehat{B} & \tan\widehat{C} \end{pmatrix}$$

- $O(\tan\widehat{B} + \tan\widehat{C}, \tan\widehat{A} + \tan\widehat{C}, \tan\widehat{A} + \tan\widehat{B})$

  Notons M, N, P les milieux respectifs de $[BC], [CA], [AB]$. Il est clair que les médiatrices de ABC sont les hauteurs de MNP et que les angles $\widehat{M}, \widehat{N}, \widehat{P}$ de MNP sont respectivement égaux aux angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ de ABC, puisque $(MN)\,//\,(AB)$, $(NP)\,//\,(BC)$, $(PM)\,//\,(CA)$.

  D'après l'étude précédente de l'orthocentre, $O = bar\begin{pmatrix} M & N & P \\ \tan\widehat{M} & \tan\widehat{N} & \tan\widehat{P} \end{pmatrix}$.

  On remplace : $M = bar\begin{pmatrix} B & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = bar\begin{pmatrix} A & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = bar\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient que

$$\begin{aligned} O &= bar\begin{pmatrix} B & C & A & C & A & B \\ \tan\widehat{A} & \tan\widehat{A} & \tan\widehat{B} & \tan\widehat{B} & \tan\widehat{C} & \tan\widehat{C} \end{pmatrix} \\ &= bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} & \tan\widehat{A} + \tan\widehat{C} & \tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} \end{pmatrix} \end{aligned}$$